



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias de la Electrónica

**TUTOR COGNITIVO PARA EL APOYO DE ALUMNOS DE
NIVEL MEDIO SUPERIOR EN LA RESOLUCIÓN DE
PROBLEMAS DE ÁLGEBRA**

**Tesis presentada para obtener el título de
Doctor en Sistemas y Ambientes Educativos**

PRESENTA:

BLANCA ESTELA PEDROZA MÉNDEZ.

DIRECTOR DE TESIS: DR. JUAN MANUEL GONZÁLEZ CALLEROS

CO-DIRECTORA DE TESIS: DRA. JOSEFINA GUERRERO GARCÍA

Puebla Pue., febrero de 2018.

AGRADECIMIENTOS

- A cada uno de los docentes del núcleo académico del Doctorado en Sistemas y Ambientes Educativos (DSAE).
- A mi director y codirectora de tesis, el Dr. Juan Manuel González Calleros y la Dra. Josefina Guerrero García, por todo su apoyo para la culminación de la tesis.
- A la coordinadora del DSAE, la Dra. Yadira Navarro Rangel por su apoyo incondicional, desde el inicio del doctorado.
- A todo el personal administrativo del DSAE.
- A mis lectores externos: La Dra. Patricia Balcázar Nava y el Dr. Javier Francisco García Orozco por su apoyo durante todos los coloquios y en las revisiones de la tesis.
- Al Dr. Cesar Collazos, por su apoyo durante mi estancia de investigación en Colombia.
- De manera muy especial al Dr. Carlos Alberto Reyes García, quien me ha compartido mucha de su gran experiencia como investigador, siendo la base para muchos de los aportes logrados en este proyecto de investigación.
- Al Dr. Ivan Olmos, por sus sabios consejos, en la fase final del proyecto.
- Al Dr. José Federico Ramírez Cruz, quien, de manera incondicional me apoyó en muchas ocasiones, en el desarrollo del proyecto.
- A mis amigos y compañeros del trabajo.
- A mis amigos y compañeros de la estancia en Colombia.
- A mis compañeros y amigos del DSAE.
- A las instituciones que hicieron posible mi formación doctoral:
 - El **Instituto Tecnológico de Apizaco**, mi centro de trabajo, por el apoyo recibido a través de la beca comisión durante los tres años.
 - La **Benemérita Universidad Autónoma de Puebla** por ser la institución que me proporciono la formación académica

- A la **Secretaría de Educación Pública**, que a través de Programa para el Desarrollo Profesional Docente (PRODEP), me apoyó con una beca para estudios de Posgrado de Alta Calidad, durante los tres años de mi formación académica.

AGRADECIMIENTOS y DEDICATORIAS

- ❖ A Dios, por regalarme todos los días, la gracia de tener vida, salud y fuerzas.
- ❖ A mi Esposo Cristóbal por apoyarme en todo momento.
- ❖ A mis hijos Nahomy Ameyalli y Chris, porque son una gran bendición de Dios y son el motivo que me impulsa a seguir adelante.
- ❖ A mi madre, Priscila, por el gran impulso que me ha dado desde siempre.
- ❖ A mis hermanos, que de una u otra manera siempre están ahí en los momentos difíciles.
- ❖ A mi tía y amiga, Seve, porque siempre estas para escucharme.
- ❖ A mi cuñada Adriana, por su apoyo.

Tabla de contenido

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN	1
1.1 Resumen	1
1.2 Presentación.....	4
1.2.1 Descripción y ubicación general del proyecto	4
1.2.2 Sustentos teóricos	5
1.2.3 Descripción general de la propuesta	11
1.3 Protocolo	13
1.3.1 Problema de investigación	13
1.3.2 Planteamiento del problema	18
1.3.3 Propuesta de solución	19
1.3.4 Justificación	21
1.3.5 Marco Epistémico	22
1.3.6 Hipótesis.....	22
1.3.7 Pregunta de investigación central	23
1.3.8 Objetivo general	23
1.3.9 Variables	23
1.3.10 Descripción del contenido	23
■ CAPÍTULO 2. ESTADO DEL ARTE	27
2.1 Revisión de la literatura	29
2.1.1 Trabajos relacionados con el modelo del estudiante.....	29
2.1.2 Investigaciones relacionadas con la Teoría de la Carga Cognitiva y sus efectos	31
2.1.3 Trabajos relacionados con la Valoración y/o Evaluación.....	32

2.1.4 El Diseño Instruccional como objetivo de algunas investigaciones	34
2.1.5 La Enseñanza del Álgebra en investigaciones	35
2.1.6 Investigaciones sobre la Resolución de Problemas	37
2.1.7 Lógica Difusa como tema de algunas investigaciones relacionadas con sistemas educativos	38
2.1.8 La Retroalimentación (Feedback) en el ámbito de investigaciones relacionadas con la educación.....	39
2.1.9 Trabajos relacionados con la Interacción Humano - Computadora	40
2.2 Clasificación de artículos del estado del arte.....	41
2.2.1 Análisis de la clasificación de artículos.....	42
2.3 Conclusiones del Estado del Arte	44
2.4 Limitantes de la literatura.....	45
2.4.1 Limitantes de la literatura	46
2.4.2 Relación de la propuesta de tesis con las limitantes encontradas en la literatura	47
■ CAPÍTULO 3. MARCO TEÓRICO CONCEPTUAL	49
3.1 Conceptos claves	51
3.1.1 Habilidad Cognitiva	51
3.1.2 Disertación sobre la habilidad cognitiva	52
3.1.3 La habilidad cognitiva en la resolución de problemas y el diseño instruccional	55
3.1.4 Resolución de Problemas.....	57
3.1.5 Disertación sobre la resolución de problemas.....	60
3.1.6 Diseño Instruccional	61

3.1.7	Disertación sobre diseño instruccional	63
3.1.8	Disertación sobre la relación entre los conceptos principales ...	63
3.2	Descripción de las Teorías	65
3.2.1	Teoría Cognitiva	65
3.2.2	Disertación sobre la Teoría Cognitiva	68
3.2.3	Teoría de la Carga Cognitiva (TCC).....	69
3.2.4	Efectos estudiados por la teoría de la Carga Cognitiva.....	75
3.2.5	Disertación de la Teoría de la Carga Cognitiva	78
3.2.6	Teoría del Aprendizaje	78
3.2.7	Valoración y/o Evaluación	80
3.2.8	Taxonomías.....	82
3.2.9	Evaluación de la Habilidad Cognitiva.	83
3.2.10	Enseñanza del Álgebra	85
3.2.11	Disertación sobre la Teoría del Aprendizaje.....	87
3.2.12	Teoría de la Interacción Humano – Computadora.....	91
3.2.13	Disertación sobre la teoría de la interacción humano - computadora	95
3.2.14	Sistemas Tutoriales Inteligentes.....	95
3.2.15	Teoría de la Lógica Difusa.....	98
3.2.16	Disertación de las teorías de Tutores Inteligentes y Lógica Difusa	113
3.2.17	Conclusiones del marco teórico	114
■	CAPÍTULO 4. METODOLOGÍA.....	115
4.1	Descripción de la población.....	115
4.2	Primera Y Segunda Fase: Diseño y aplicación de Instrumentos ..	118

4.2.1	Muestra del primer pilotaje de la primera fase.....	119
4.2.2	Muestra del segundo pilotaje de la primera fase	120
4.3	Tercera Fase: Diseño Instruccional e impartición del taller	122
4.4	Cuarta y Quinta Fase: Aplicación del Post Test	126
4.5	Sexta y Séptima Fase: Propuesta y automatización de los Modelos de Sistemas Difusos	127
4.5.1	Sistema de inferencia difuso para el módulo del estudiante....	130
4.5.2	Mapas Cognitivos Difusos para el módulo del dominio	131
4.6	Octava Fase: Implementación de la herramienta	133
4.6.1	Módulos automatizados.....	134
4.6.2	Módulos manuales o semi – automatizados.....	135
	<i>Módulo de visualización</i>	137
	<i>Módulo de Ejecución y Administración</i>	137
■	CAPÍTULO 5. RESULTADOS Y DISCUSIÓN.	140
5.1	Presentación y explicación de resultados.....	140
5.2	Resultados de la metodología	149
5.2.1	Resultados del primer pilotaje	149
5.2.2	Resultados del segundo pilotaje.....	150
	Fuente: Diseño propio.	156
5.2.3	Resultados de la prueba de hipótesis	156
	Fuente: Diseño propio	158
5.3	Análisis de resultados preliminares del post test	158
5.3.1	Discusión de los resultados.....	161
■	CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES.	162
6.1	Análisis de los resultados	162

6.2	Resultados publicados.....	168
6.3	Trabajos futuros.....	170
■	REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	171
■	ANEXOS	190
8.1	Anexo 1. Instrumentos de jueceo	190

Índice de Esquemas

Esquema 1. Identificación de los conceptos

<i>Esquema 1. Identificación de los conceptos claves del proyecto de tesis, a partir de la pregunta de investigación y su relación con las teorías que sustentan el proyecto de Tesis. Fuente: Diseño propio.....</i>	<i>28</i>
<i>Esquema 2. Las relaciones entre los conceptos principales, a través de subconceptos y teorías. Fuente: Diseño propio.....</i>	<i>65</i>
<i>Esquema 3. Flujo de información a través de un sistema de memoria. Fuente: Background, 2012.</i>	<i>67</i>
<i>Esquema 4. Descripción de los tipos de Carga Cognitiva. Fuente: Diseño propio.....</i>	<i>70</i>
<i>Esquema 5. El proceso de aprendizaje en la Teoría de la Carga Cognitiva (TCC). Fuente: Diseño propio</i>	<i>73</i>
<i>Esquema 6. Representación del efecto “worked examples”. Fuente: Diseño propio.....</i>	<i>77</i>
<i>Esquema 7. Taxonomía de Bloom original y revisada. Fuente: Skiba, 2013.....</i>	<i>84</i>
<i>Esquema 8. El aprendizaje y su relación con algunos conceptos y teorías del proyecto. Fuente: Diseño propio</i>	<i>90</i>
<i>Esquema 9. Arquitectura de un Sistema Tutor Inteligente con gamificación.....</i>	<i>97</i>
<i>Esquema 10. Arquitectura de un Sistema de Inferencia Difuso básico. Fuente: Roger Jang et al., 1997.</i>	<i>101</i>
<i>Esquema 11. Diagrama de bloques de un sistema de inferencia difuso. Fuente: Roger Jang et al., 1997.....</i>	<i>101</i>
<i>Esquema 12. Mapa cognitivo con valores de -1 y +1 en las relaciones causales.....</i>	<i>107</i>
<i>Esquema 13. Una representación de un MCD con tres nodos.</i>	<i>108</i>
<i>Esquema 14. Descripción de la metodología utilizada durante el proyecto de investigación, incluyendo la forma en que los actores participan en cada una de las etapas del proceso metodológico. Fuente: Diseño propio.</i>	<i>116</i>
<i>Esquema 15. Descripción general del diseño instruccional. Fuente: Diseño propio.</i>	<i>122</i>
<i>Esquema 16. Material didáctico animado para la enseñanza de la resolución de problemas de álgebra....</i>	<i>124</i>
<i>Esquema 17. Alumnos jugando con el memorama, en el taller que se impartió.....</i>	<i>125</i>
<i>Esquema 18. Memorama para asociar expresiones algebraicas con su correspondiente descripción lingüística</i>	<i>125</i>
<i>Esquema 19. Memorama para asociar un problema con su correspondiente expresión algebraica</i>	<i>126</i>
<i>Esquema 20. Manejo de un tablero gamificado, con insignias, diseñado con material físico.....</i>	<i>126</i>
<i>Esquema 21. Clasificación y descripción de los procesos del diseño instruccional. Fuente: Diseño propio. ...</i>	<i>129</i>
<i>Esquema 22. Proceso iterativo para automatizar el diseño instruccional, a través de sistemas difusos. Fuente: Diseño propio.....</i>	<i>130</i>
<i>Esquema 23. Diagrama general de sistema de inferencia difuso del módulo del estudiante. Fuente: Diseño propio.</i>	<i>131</i>
<i>Esquema 24. Mapa cognitivo difuso para los temas de álgebra de la unidad 1. Fuente: Diseño propio.</i>	<i>133</i>
<i>Esquema 25. Matriz de pesos de cada uno de los mapas cognitivos difusos</i>	<i>133</i>

<i>Esquema 26. Descripción de la herramienta semi- automatizada, especificando los módulos automatizados y los módulos no automatizados. Fuente: Diseño propio.....</i>	<i>135</i>
<i>Esquema 27 Diagrama de flujo de los procesos que se realizan en la herramienta semi automatizada. Fuente: Diseño propio.....</i>	<i>139</i>
<i>Esquema 28. Visualización de los resultados del primer proceso del esquema 22.....</i>	<i>148</i>
<i>Esquema 29. Visualización de resultados del tercer proceso iterativo del esquema 22.....</i>	<i>148</i>
<i>claves del proyecto de tesis, a partir de la pregunta de investigación y su relación con las teorías que sustentan el proyecto de Tesis. _____</i>	<i>28</i>

Índice de Tablas

<i>Tabla 1. Resultados obtenidos en el examen diagnóstico de la Facultad de Ingeniería de la UNAM.</i>	<i>16</i>
<i>Tabla 2. Matriz metodológica</i>	<i>25</i>
<i>Tabla 3. Operacionalización de las variables del proyecto de investigación</i>	<i>26</i>
<i>Tabla 4. Análisis y clasificación de diversos artículos en base a los diez temas base de la investigación</i>	<i>43</i>
<i>Tabla 5. Temas que incluyen los 2 artículos que abarcan 6 de los 10 temas considerados en el análisis del estado del arte.....</i>	<i>45</i>
<i>Tabla 6. Temas de artículos de la Tabla 4 con el más alto factor de impacto.....</i>	<i>46</i>
<i>Tabla 7. Factores en la resolución de problemas con incógnita</i>	<i>88</i>
<i>Tabla 8. Factores en la resolución de problemas con número general</i>	<i>88</i>
<i>Tabla 9. Factores en la resolución de problemas con relación funcional</i>	<i>89</i>
<i>Tabla 10. Actividades de cada uno de los módulos del Sistema Tutorial Inteligente</i>	<i>99</i>
<i>Tabla 11. Alumnos a los que se les aplicó el segundo pilotaje, clasificados por grupo y por sexo.</i>	<i>121</i>
<i>Tabla 12. Descripción de los elementos del modelo difuso</i>	<i>132</i>
<i>Tabla 13. Algunas teorías y conceptos que sustentan la construcción de un tutor cognitivo.</i>	<i>140</i>
<i>Tabla 14. Resultados de la clasificación de alumnos mediante el modelo difuso</i>	<i>143</i>
<i>Tabla 15. Matriz asociada al mapa cognitivo difuso de los 5 temas de álgebra.</i>	<i>146</i>
<i>Tabla 16. Valores promedio del grupo de los 57 alumnos en cada uno de los tipos de problemas del primer pilotaje.....</i>	<i>150</i>
<i>Tabla 17. Resumen del procesamiento de casos de la prueba de normalidad para 9 variables del pretest. .</i>	<i>155</i>
<i>Tabla 18. Resultados de la prueba de normalidad para 9 variables del pretest del segundo pilotaje</i>	<i>156</i>
<i>Tabla 19. Análisis de resultados de la prueba de normalidad para los promedios de diferentes categorías en las que se clasificaron los datos del pretest del segundo pilotaje.</i>	<i>157</i>
<i>Tabla 20. Resultados de la prueba de correlación de Pearson aplicada a los diferentes tipos de exámenes. </i>	<i>157</i>
<i>Tabla 21. Resultado del valor de significancia para la prueba de hipótesis</i>	<i>158</i>
<i>Tabla 22 . Valores de la media para los promedios obtenidos en el pre test y en el post test</i>	<i>159</i>

<i>Tabla 23. Valores obtenidos del análisis de regresión entre las variables: habilidad cognitiva y total de actividades realizadas durante el taller.....</i>	<i>159</i>
<i>Tabla 24. Parámetros del análisis de regresión.....</i>	<i>160</i>

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

1.1 Resumen

El aprendizaje de las matemáticas está muy relacionado con el hecho de que el estudiante sepa cómo resolver problemas. Existen teorías que sustentan que la enseñanza de resolución de problemas requiere de técnicas basadas en la habilidad cognitiva de los estudiantes, ligadas al tipo de problemas o ejemplos (cuando la habilidad cognitiva es baja) que deben trabajar; este proceso requiere de herramientas automatizadas, que permitan identificar las características de los alumnos para poder proporcionar estrategias de enseñanza más personalizadas y que además manejen una retroalimentación que ayude al alumno y al docente a identificar sus logros. Este tipo de herramientas automatizadas se conocen como tutores cognitivos, los cuales son sistemas tutoriales inteligentes, con la particularidad de estar enfocado en proporcionar apoyo individualizado a los estudiantes para mejorar sus habilidades cognitivas complejas, a través de la práctica de resolución de problemas.

En este proyecto de tesis se propone una herramienta semi-automatizada, mediante la cual se implementan los diferentes módulos de un tutor cognitivo, siguiendo un diseño instruccional para la resolución de problemas de álgebra, tomando como base el manejo de algunas estrategias sencillas de gamificación y de juegos basados en la técnica de la teoría computacional de interfaces de usuario tangibles. Para el módulo del modelo del estudiante, se trabaja con un sistema de inferencia difuso para detectar y clasificar la habilidad cognitiva del estudiante. En los módulos de modelo del dominio y del modelo tutor se definen e implementan mapas cognitivos difusos combinados con otro sistema de inferencia difuso, para determinar, las actividades relacionadas con los diversos tipos de problemas relacionados con diversos temas de álgebra y para determinar las

actividades pedagógicas que el alumno debe seguir en cada una de las etapas de la resolución de problemas.

El desarrollo del diseño instruccional que se implementó en el tutor cognitivo, es el objetivo principal de este proyecto. Para validar el diseño instruccional se llevó a cabo un experimento con alumnos de nivel medio superior, en el que se aplicó un pre test a 393 alumnos, de los cuales se seleccionó una muestra por conveniencia, para aplicar un taller basado en el diseño instruccional, aunque aún de manera manual, y posteriormente aplicar un pos tes, con el cual se pudo realizar una prueba de hipótesis, mediante la cual se obtuvieron datos que ayudaron a detectar características que evidencian que la propuesta del diseño instruccional puede ayudar a mejorar la habilidad cognitiva de los alumnos en la resolución de problemas, y que es viable de mejorarse a través de herramientas semi – automatizadas o automatizadas

Palabras clave: Sistemas Tutoriales Inteligentes, Tutores Cognitivos, Diseño Instruccional, Teoría de la Carga Cognitiva, Habilidad Cognitiva, “Expertise reversal”, “Worked Examples”, Lógica Difusa, Sistemas de Inferencia Difusa. Mapas Cognitivos Difusos, Gamificación, Interfaces de Usuario Tangibles, Enseñanza – Aprendizaje del Álgebra, Resolución de Problemas, Evaluación.

Abstract

Learning mathematics is closely related with the fact that the student knows how to solve problems. There are cognitive theories that say that problem solving teaching requires techniques based on the student's cognitive ability, linked to the type of problems or examples (when cognitive ability is low) that must work. This process requires automated tools to identify the characteristics of the students in order to provide more personalized teaching strategies and also manage feedback that helps the student and the teacher to identify their achievements. These types of automated tools are known as cognitive tutors, which are intelligent tutoring systems, with the particularity of being focused on providing individualized support

to students to improve their complex cognitive skills, through problem-solving practice.

In this thesis project a semi-automated tool is proposed, by means of which, the different modules of a cognitive tutor are implemented, following an instructional design for solving algebra problems, through the management of gamification and game strategies based on the techniques of computational theory of tangible user interfaces. For the student model module, a fuzzy model is used to detect and classify the student's cognitive ability. In modules of model of the domain and the tutor model, fuzzy cognitive maps are defined and implemented to determine, respectively, the activities related to the different types of problems related to various algebra topics and to determine the pedagogical activities that the student must follow in each of the stages of problem solving.

The development of the instructional design that is implemented in the cognitive tutor, is the main objective of this project. To validate the instructional design, an experiment was carried out with upper secondary students, in which a pre-test was applied to 393 students, from which a sample for convenience was selected, to apply a workshop based on the instructional design, although still manually, and subsequently apply a posttest. With this experiment, a hypothesis test was carried out, through which data were obtained that helped to detect characteristics that show that the proposal of the instructional design can help to improve the cognitive ability of the students in the resolution of problems.

Keywords: Intelligent Tutorial Systems, Cognitive Tutors, Instructional Design, Cognitive Load Theory, Cognitive Ability, Expertise Reversal, Worked Examples, Fuzzy Logic, Fuzzy Cognitive Maps, Gamification, Tangible User Interfaces, Teaching - Learning Algebra, Problem Solving, Evaluation.

1.2 Presentación

1.2.1 Descripción y ubicación general del proyecto

Las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TIC), actualmente están siendo utilizadas en diversos sectores de la sociedad, siendo el educativo uno de ellos. Sin embargo, si no se genera una estrategia sistematizada para utilizarlas de forma adecuada en el proceso de enseñanza–aprendizaje y explotar todos los beneficios que podrían lograrse con su incorporación en las aulas educativas, se estará desperdiciando todo el potencial de estas herramientas. Cuando se habla de incorporar las TIC al proceso educativo, no se trata solo de integrar herramientas de hardware, las TIC también involucran herramientas de software para que las primeras funcionen correctamente. Por lo tanto, lo ideal es crear estrategias que involucren la inclusión de herramientas tanto de software como de hardware con un sustento pedagógico que ayude a los alumnos en su proceso educativo.

En México, las deficiencias escolares en los alumnos se pueden ver en diversas áreas de su formación, sin embargo, las matemáticas son una de las materias que más índices de reprobación muestran en los diferentes niveles educativos, de acuerdo a muchos instrumentos de evaluación que aplican las instituciones oficiales. Es bien sabido que el aprendizaje de las matemáticas requiere de un razonamiento abstracto, que muchas veces se confunde con la memorización. Según la literatura y algunas experiencias docentes personales, este es uno de los motivos por el cual no se logra un aprendizaje significativo de los temas relacionados con las matemáticas, lo que provoca que los alumnos acumulen deficiencias en el aprendizaje, que con el paso de un nivel a otro se van incrementando de manera preocupante al grado tal que, al llegar a la universidad, no dominan conceptos básicos que debieron conocer desde la primaria y secundaria.

Por tal motivo, se puede observar que existe una amplia gama de oportunidades para desarrollar estrategias didácticas que ayuden a generar un aprendizaje profundo en los estudiantes, es decir, un aprendizaje en el que estudian para aprender y buscan el significado y la aplicación de lo que están aprendiendo (Biggs, 2004). Sin embargo, al ser tan amplia el área de oportunidades, se puede caer en el riesgo de generar estrategias que no tengan un sustento teórico pedagógico y tecnológico. De la misma manera, el no acotar y dimensionar el problema, puede conducir a un trabajo de investigación arduo e infructuoso. Por lo tanto, acotando el problema, la presente investigación se enfoca en proponer estrategias dirigidas a estudiantes de nivel medio superior y superior, para la resolución de problemas en el área del álgebra, utilizando algunas técnicas computacionales, por lo que, en la siguiente sección, se describen de manera general las teorías que se están considerando como sustento para el proyecto.

La investigación está enfocada en alumnos de bachillerato, ya que el hecho de manejar estrategias para determinar los conocimientos de los alumnos en algunos temas específicos, es porque se parte del hecho de que en bachiller los alumnos ya deberían tener un nivel adecuado de conocimientos sobre los temas, en este caso temas de álgebra, la cual es una materia que en México, se imparte desde la secundaria, sin embargo, se pueden encontrar deficiencias en el manejo de los temas del álgebra en alumnos de bachillerato, de licenciatura e incluso de maestría. Por tal motivo, en principio, el sistema que se propone, se podría manejar como una herramienta correctiva y más a futuro, en base a los resultados obtenidos, se podría adecuar a una herramienta que ayude a lograr el aprendizaje desde niveles más inferiores.

1.2.2 Sustentos teóricos

El proceso de la enseñanza de las matemáticas, así como el de otras áreas ha sido objeto de estudio de muchos investigadores de la psicología, por lo que existen muchas teorías relacionadas con el proceso de enseñanza – aprendizaje

como es el caso de la Teoría del Aprendizaje Cognitivo y la Teoría de la Carga Cognitiva (TCC).

La Teoría del Aprendizaje Cognitivo se apoya en una base de la investigación sobre la estructura de la memoria de trabajo llevada a cabo en los años 1970 y 1980. Allan Paivio propuso una hipótesis de doble codificación que sugiere que hay subsistemas separados en el cerebro para la representación de la información verbal y visual. El modelo posteriormente construido por Alan Baddeley se convirtió ampliamente influyente como la hipótesis de doble codificación. En el modelo de Baddeley, la memoria a corto plazo consiste en dos buffers que son parcialmente independientes entre sí. El buffer visio-espacial se utiliza para almacenar temporalmente la información visual, y el área fonológica se utiliza para la información auditiva (Swann, 2013).

La Teoría de la Carga Cognitiva se basa en el supuesto de que la construcción y la automatización de esquemas cognitivos de aprendizaje son las principales metas de la instrucción, pero esos objetivos pueden ser frustrados por la limitada capacidad de memoria de trabajo. Debido a la limitada capacidad de memoria de trabajo, la correcta asignación de los recursos cognitivos disponibles es esencial para el aprendizaje (Kalyuga, 2011). Si un estudiante tiene que gastar recursos limitados en actividades no relacionadas directamente con la construcción de esquemas y la automatización, el aprendizaje puede ser inhibido (Paas, Renkl, y Sweller, 2004). Dentro de la TCC, se considera que el nivel de experiencia de un alumno es un factor crítico para determinar qué información es relevante para el alumno y qué información debe ser atendida. El enfoque basado en esquemas se ha utilizado con éxito para explicar las diferencias entre aprendices expertos y novatos. Los expertos poseen un gran número (potencialmente ilimitado) de esquemas de dominio específico. Jerárquicamente los esquemas organizados representan el conocimiento de expertos en el dominio que permiten a los expertos clasificar múltiples elementos de información relacionada como una sola, los cuales se consideran elementos de alto nivel. Cuando se enfrentan con una configuración específica de los elementos, los

expertos son capaces de reconocer el patrón como un esquema familiar y tratar (y actuar en) toda la configuración como una sola unidad (Kalyuga, 2011).

El efecto moderador de la experiencia sobre la efectividad de los principios de diseño instruccional derivados de la teoría de la carga cognitiva (TCC) se denomina el efecto “expertise reversal”. Este efecto moderador está sustentado por numerosos experimentos que utilizan una amplia gama de materiales instruccionales. Los estudios sobre las diferencias entre expertos y novatos en las últimas décadas han demostrado claramente que la base de conocimientos que se aprende es una sola característica cognitiva importante que influye en el aprendizaje y el rendimiento. Existen estudios en el marco de la carga cognitiva, así como algunos resultados de investigaciones sobre interacciones de tratamientos de aptitud, que han demostrado que los diseños y las técnicas que son eficaces con personas de bajo conocimiento puede perder su eficacia e incluso tener consecuencias negativas para los alumnos más competentes (Kalyuga, Ayres, Chandler, y Sweller, 2003; Kalyuga, 2006). El efecto “expertise reversal” se produce cuando los diseños instruccionales moderan la experiencia del alumno (Rey y Andreas, 2013).

Así mismo existen investigaciones relacionadas con otro enfoque de la carga cognitiva conocido como “worked examples” el manejo de ejemplos trabajados o resueltos las cuales han demostrado que cuando a los estudiantes se les presentan pares de ejemplos-problema en lugar de problemas solamente, alcanzan resultados de aprendizaje superiores porque la capacidad de la memoria de trabajo no está sobrecargada (Kalyuga, Chandler, Tuovinen, y Sweller, 2001; Chen, Kalyuga y Sweller, 2015). Sobre esta línea de investigación surgió el efecto “expertise reversal” que indica que los ejemplos resueltos son más favorables en las primeras etapas de aprendizaje, mientras que la resolución de problemas podría ser más eficaz en las etapas posteriores. Los ejemplos resueltos reducen la demanda de resolución de problemas a través de soluciones ya trabajadas. Por lo tanto, más de la capacidad de procesamiento limitada de los alumnos (es decir, la capacidad de la memoria de trabajo) se dedicará a la comprensión de los

principios del dominio en cuestión y a la aplicación del problema (Salden, Aleveln, Schwonke, y Renkl, 2010).

Tan importante es considerar las teorías pedagógicas que sustentan el aprendizaje de las matemáticas, como hacer énfasis en que existen diferentes estrategias que se pueden seguir para lograr dicho aprendizaje, una de ellas es la resolución de problemas. En Moreno (1998) se menciona que aprender matemáticas implica aplicar lo aprendido para resolver problemas similares. Así mismo Bailey y Taylor (2015) mencionan que una enseñanza ambiciosa en matemáticas se refiere al apoyo que se le debe proporcionar a todos los estudiantes para desarrollar una comprensión conceptual, fluidez en los procedimientos, competencia estratégica, y el razonamiento adaptativo para resolver problemas auténticos (Bailey y Taylor, 2015). La enseñanza, a través de la resolución de problemas se considera una práctica de enseñanza de alto nivel.

Hasta el momento se ha hablado de teorías y estrategias relacionadas con la enseñanza de las matemáticas, sin embargo, hablar de la enseñanza de las matemáticas es hablar de un campo muy amplio en el que existen muchas dificultades con respecto a su aprendizaje, por tal motivo, tratando de acotar la investigación que se lleva a cabo en este proyecto de tesis, nos enfocaremos específicamente en la enseñanza de la resolución de problemas en un área de las matemáticas, el álgebra. Un enfoque que ayuda a acotar un poco más la investigación es el propuesto en Ursini, Escareño, Montes y Trigueros (2008) denominado modelo 3UV (3 usos de la variable), el cual surgió de un análisis de lo que se requiere para hacer ejercicios y problemas de álgebra de libros de texto estándar. El análisis reveló que, en los cursos de álgebra elemental, a las variables se les asignan esencialmente tres usos: como incógnita, como número general y para simbolizar relaciones funcionales. También se identificaron una serie de factores a los que se enfrenta el usuario para resolver problemas o hacer ejercicios de álgebra.

De la misma manera se puede mencionar que los avances en la tecnología dan lugar a la generación de innovaciones que ayudan a que las actividades

diarias del ser humano sean cada vez más fáciles de llevar a cabo. Con el surgimiento de las tecnologías inteligentes en el área de la computación, se ha generado un campo más amplio de oportunidades para el desarrollo de nuevas tecnologías de cómputo que ayuden en diversos sectores de la sociedad, como son el sector médico, educativo, industrial, por mencionar algunos. Dentro del ámbito educativo existen muchas opciones para el desarrollo de sistemas de cómputo que ayudan en el proceso de la enseñanza – aprendizaje. Cuando a dichos sistemas se les incorpora técnicas de inteligencia artificial, dan como resultado lo que se conoce como sistemas tutoriales inteligentes (González, Mora y Toledo, 2014). Un Sistema Tutorial Inteligente (STI), se define como un programa de formación basado en la computadora que utiliza la inteligencia artificial para adaptar el aprendizaje con dispositivos de multimedia y poder proporcionar educación individualizada (Bouchard, 2008).

El aprendizaje y la adquisición de habilidades cognitivas pueden ser soportados de diferentes maneras. Un enfoque muy exitoso es el uso de "resolución de problemas mediante la orientación" por sistemas tutoriales inteligentes. Estos sistemas proporcionan apoyo individualizado para el aprendizaje mediante la práctica (es decir, resolviendo problemas), seleccionando problemas apropiados a resolver, al proporcionar retroalimentación y sugerencias de resolución de problemas, y por la evaluación en línea de progreso en el aprendizaje del estudiante. Los tutores cognitivos son una forma particular de sistemas tutoriales inteligentes, basados en la teoría cognitiva; son tutores computarizados que proporcionan apoyo individualizado para el aprendizaje de las habilidades cognitivas complejas a través de la práctica de resolución de problemas (Salden, et al. 2010). Dichos tutores seleccionan problemas apropiados a ser resueltos, proporcionando como retroalimentación, sugerencias para resolver problemas y evaluar los progresos de aprendizaje de cada estudiante. Los tutores cognitivos individualizan la instrucción seleccionando problemas basados en un modelo del estado del conocimiento actual de los estudiantes que es constantemente actualizado a través de un proceso bayesiano llamado "el conocimiento de rastreo" (Salden, Koedinger, Renkl, Alevan y McLaren, 2010). La

mayoría de los sistemas tutoriales centran su atención en las respuestas correctas durante la resolución de problemas, lo cual puede no ser ideal para obtener una comprensión conceptual de los principios de dominio en la resolución de problemas (Salden, Alevan, Renkl y Schwonke, 2009).

Así mismo, al trabajar con sistemas tutoriales inteligentes, podemos incluir otras estrategias relacionadas con técnicas y/o teorías computacionales, en este caso se está trabajando con la teoría de la gamificación y la teoría de las interfaces de usuario tangibles.

Seaborn y Fels (2014) mencionan que el término gamificación puede ser definido como el uso intencional de elementos de juego para una experiencia completa del juego de tareas y contextos que no son juegos. Los elementos del juego son los patrones, objetos, principios, modelos y métodos inspirados directamente por los juegos.

Las interfaces tangibles se ocupan de proporcionar representaciones tangibles a la información y controles digitales, lo que permite a los usuarios captar los datos, literalmente con sus manos. La motivación original detrás de una interfaz de usuario tangible es, conectar el mundo físico con el digital mediante el uso de artefactos físicos y, por lo tanto, mantener la riqueza de las interacciones físicas. Esto es novedoso y contrario a la tendencia principal que se centra en forzar al usuario a introducirse en un mundo virtual (Cuendet, Dehler-Zufferey, Ortoleva, y Dillenbourg, 2015).

La implementación de un sistema tutor inteligente, requiere del manejo de modelos que puedan simular la toma de decisiones en cuanto a las estrategias pedagógicas, los tipos de problemas y las actividades, que se les deben ir proporcionando al estudiante, dependiendo, tanto de su estilo de aprendizaje, el avance en la habilidad cognitiva con respecto al manejo de los temas de álgebra y al interés que el alumno presenta, durante la interacción con la herramienta, y durante la clase. Los Sistemas de Inferencia Difuso (SID) y los mapas cognitivos difusos (MCD) son modelos que ayudan en este tipo de procesos, ya que son una

metodología de la computación suave, utilizada para representar el conocimiento científico social. Pertenecen a la clase de sistemas neuro – difusos, que son capaces de incorporar el conocimiento humano y adaptarlo a través de los procedimientos de aprendizaje (Parsopoulos, Papageorgiou, Groumpos, y Vrahatis 2003; Garcia-H. et al. 2004; Papageorgiou y Salmeron, 2013; Salmeron, 2009). Los MCD fueron introducidos por Kosko quien describió el modelado de mapas cognitivos con dos características importantes: (a) las relaciones causales entre los nodos fueron fuzificadas, y (b) el sistema fue habilitado con retroalimentación dinámica. Los cambios a través de los nodos y sus cambios de efecto posterior en los nodos cambian los valores anteriores. Muestran la relación causal entre los conceptos aplicados y ayudan a analizar sus patrones de inferencia. Ellos abordan eficazmente la incertidumbre y la fuzificación de los archivos de registro de datos generados durante los procesos de diagnóstico (Sweta y Lal, 2017).

1.2.3 Descripción general de la propuesta

Considerando como sustento, las teorías brevemente descritas en la sección anterior, en el presente proyecto de tesis, se tiene como objetivo, implementar estrategias que permitan apoyar a los docentes para llevar a cabo una enseñanza de resolución de problemas de álgebra, de una manera más personalizada, lo cual pueda permitir lograr un acompañamiento más individualizado, durante el proceso de enseñanza – aprendizaje de temas de álgebra. La forma de lograr lo anterior es, primero, mediante un diseño instruccional que considera la detección constante de la habilidad cognitiva del alumno en la resolución de problemas que van incrementando su complejidad, esto sustentado en los dos efectos de la teoría de la carga cognitiva. Así mismo, el diseño instruccional también está basado en material interactivo y el manejo de juegos didácticos relacionados con temas de álgebra. Dicho diseño instruccional es implementado en una herramienta semi-automatizada, construida, siguiendo la arquitectura de un Sistema Tutorial Inteligente, utilizando técnicas de gamificación, interfaces de usuario tangibles y la

implementación de modelos difusos, para simular la parte inteligente del sistema tutorial.

En un principio, la idea era diseñar un tutor cognitivo totalmente automatizado, que es un sistema del cual se pueden encontrar, en la literatura y como productos ya desarrollados, diversas propuestas e implementaciones. Sin embargo, por experiencias vividas durante el proceso del trabajo de campo realizado en algunas instituciones de educación media superior pública, se pudo constatar que, aun cuando la era digital está tan avanzada, en muchas instituciones educativas públicas no existen las condiciones necesarias para que se puedan utilizar herramientas totalmente automatizadas en todas las clases, debido a que no se cuenta con toda la infraestructura necesaria, como lo son, computadoras suficientes, accesos adecuados a internet, por mencionar algunas. Cuendet, Dehler-Zufferey, Ortoleva, y Dillenbourg, (2015) mencionan que las aulas que utilizan tecnología informática son hoy la excepción más que la mayoría. Esto no es por la falta de potencial de la informática para el aprendizaje. Las computadoras pueden de hecho apoyar las características fundamentales del aprendizaje, tales como la participación activa, la participación en grupos, la interacción frecuente, la retroalimentación, y las conexiones con los contextos del mundo real, sin embargo, esto conlleva recursos que muchas veces las instituciones educativas no pueden solventar. Así mismo, cuando un maestro maneja una clase se encuentra con seis limitaciones: plan de estudios, evaluación, tiempo, esfuerzo, espacio y seguridad. También se han observado las restricciones de currículo y evaluación: orientación pedagógica; apoyo logístico para profesores; hacer frente a diferentes niveles de experiencia entre los estudiantes; y proporcionar un contexto específico de la tarea al profesor (Cuendet et al., 2015, Dillenbourg y Jermann, 2010). Estas limitaciones son las que frecuentemente impiden que se logren al 100% los objetivos del aprendizaje, de ahí la importancia de utilizar herramientas que de alguna manera ayuden al profesor en su difícil tarea, pero cuidando de no caer en tecnología costosa.

Por lo regular, las aplicaciones de software totalmente automatizadas utilizan requerimientos de hardware un tanto sofisticados, por el manejo de animaciones, gráficos y otras características, que las hacen atractivas, pero al no tener todos los recursos necesarios, para manejar herramientas totalmente automatizadas, se propone el manejo de interfaces de usuarios tangibles y juegos manuales.

1.3 Protocolo

1.3.1 Problema de investigación

El aprendizaje de las matemáticas ha sido y sigue siendo un problema que se origina y repercute en diferentes ámbitos, es decir se puede ver como un problema social y pedagógico.

Problemática social

La problemática social se puede ver, en principio, en los índices de aprovechamiento en los diferentes niveles de educación. Por ejemplo, el Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA por sus siglas en inglés), se encarga de evaluar el rendimiento de alumnos de 15 años en áreas de matemáticas, lectura y ciencia, esta evaluación se realiza cada 3 años, aunque para el área de matemáticas no siempre es así. La última evaluación que se llevó a cabo fue en el 2015. Algunas de las observaciones claves en el área de matemáticas fueron las siguientes (OCDE, 2016):

- Los estudiantes de México obtienen en promedio de 408 puntos en matemáticas, valor que está por debajo del promedio OCDE de 490 puntos y sitúa al país al lado del desempeño promedio de Albania y Georgia. Los jóvenes mexicanos de 15 años obtienen una diferencia de alrededor de 80 puntos por debajo de Portugal y España, y entre 10 y 15 puntos por debajo de los

estudiantes de Chile y Uruguay, pero se sitúan por encima de Brasil, Colombia, la República Dominicana y Perú.

- En promedio, el rendimiento de México en matemáticas ha aumentado 5 puntos cada tres años entre el 2003 y el 2015.
- En promedio en los países OCDE, casi uno de cada cuatro estudiantes (23%) no alcanza el nivel básico de competencia (Nivel 2). En matemáticas, los estudiantes que no alcanzan este nivel pueden de vez en cuando realizar procedimientos rutinarios, tales como operaciones aritméticas en situaciones donde todas las instrucciones se les son dadas, pero tienen problemas identificando cómo una (simple) situación del mundo real puede ser representada matemáticamente (por ejemplo, comparar la distancia total entre dos rutas alternativas, o convertir precios a una moneda diferente). En México, 57% de los estudiantes no alcanzan el nivel básico de competencias, lo cual es mayor que el porcentaje de Chile y Uruguay, y menor que la proporción en Brasil, Colombia, la República Dominicana y Perú. La proporción de estudiantes mexicanos que no alcanzan el nivel mínimo de competencia permaneció estable entre el 2003 y el 2015.
- En promedio, alrededor de uno de cada diez estudiantes en los países de la OCDE (10.7%) alcanzan un nivel de competencia de excelencia en matemáticas. En México, 0.3% de los estudiantes alcanzan niveles de excelencia, por debajo de los porcentajes de Brasil, Chile y Uruguay. En el 2015, México tiene una proporción similar de estudiantes que alcanzan niveles de competencia de excelencia en matemáticas que en el 2003, pero una menor proporción que en el 2006, 2009 y 2012.

Los resultados de la prueba PISA están enfocados a alumnos de nivel secundaria; con respecto al nivel bachillerato en el trabajo de investigación descrito en (Juárez Durán & Limón Robles, 2013) se reportan también diversos factores que repercuten en la deserción escolar en dicho nivel. En este estudio reportan que de las razones para que el alumno de educación media superior deserte, aproximadamente 50% tienen que ver con factores socioeconómicos. Por otra parte, en los factores que tienen que ver con las materias, como lo son, le

disgusta estudiar, problemas para entender a los maestros, reprobó alguna materia, no encontraba utilidad, dan un total del 21.3 %, aunque es menor que los factores socioeconómicos, sigue siendo un factor al que debe ponérsele atención, y es aquí donde entra el problema con las matemáticas, ya que la mayoría de las materias reprobadas son del área de matemáticas.

Otro análisis para el nivel bachillerato es el que se presenta en (Larrazolo, Backhoff, y Tirado, 2013). El objetivo del estudio que se presenta en el artículo fue investigar las habilidades de razonamiento matemático que adquieren los estudiantes mexicanos que egresan del bachillerato y que aspiran a ingresar a universidades públicas mexicanas. Se analizaron los resultados de 45 competencias matemáticas del Examen de Habilidades y Conocimientos Básicos (EXHCOBA), utilizado en los procesos de admisión de 2006 y 2007. Los resultados confirman que los estudiantes: tienen un aprovechamiento sumamente bajo, no comprenden los conceptos básicos de matemáticas, y no tienen las habilidades para solucionar problemas numéricos de mediana complejidad.

Así mismo se puede considerar el análisis realizado en Barrera-García (2003), en el cual se muestran estadísticas del índice de aprovechamiento de los alumnos de la facultad de ingeniería de la UNAM en el área de matemáticas. Los resultados que se muestran son en base a la información que se obtiene de la aplicación de un examen diagnóstico, que por más de 25 años la facultad de ingeniería ha venido aplicando a sus alumnos de primer ingreso. La elaboración del referido examen diagnóstico, en los últimos años, ha sido tomando como base los contenidos temáticos de los programas de ambos subsistemas, así como los contenidos mínimos indispensables en cuanto a matemáticas, física y química, que requieren las asignaturas curriculares de los primeros semestres de las carreras que se imparten en la Facultad de Ingeniería; teniendo cuidado de no incluir reactivos en el examen diagnóstico de contenidos que no estén en los programas de las asignaturas del bachillerato. Adicionalmente a esto, se ha cuidado que el tiempo de resolución del citado examen, no sea un factor determinante en cuanto los resultados del mismo, dado que hasta el momento el 95% de los alumnos terminan mucho antes de la hora límite. Cabe mencionar que

en el citado trabajo se presentan los resultados de 1992 a 2003, en la Tabla 1 se presentan los promedios de las distintas áreas evaluadas de matemáticas, los cuales confirman que el nivel de conocimientos promedio en matemáticas de nuestros alumnos es bajo, lo cual repercute evidentemente en su desempeño como estudiantes de una carrera de ingeniería.

Tabla 1. Resultados obtenidos en el examen diagnóstico de la Facultad de Ingeniería de la UNAM.

Gene- ración	Álg.	Trig.	Geom.	Geom. Anal.	Cálc.	Prom.	Núm. Alum.
1994	5.56	3.08	2.89	2.89	3.82	3.97	1761
1995	4.66	4.01	3.21	3.38	3.76	3.95	1652
1996	4.55	4.49	3.76	2.35	4.27	3.99	1735
1997	5.48	3.84	5.42	2.79	4.96	4.66	1791
1998	3.88	3.73	4.83	3.51	2.67	3.75	1749
1999	4.53	2.49	4.08	3.15	2.67	3.75	1639
2000	4.69	2.09	3.03	2.31	2.74	3.26	1318
2001	5.23	3.03	4.94	3.67	3.08	4.18	1523
2002	4.11	2.57	2.35	2.88	3.76	3.3	1794
2003	5.05	3.58	3.41	2.59	3.03	3.79	1776
Prom.	4.77	3.29	3.79	2.95	3.53	3.85	1674

Fuente: Barrera-García, 2003

Continuando con la problemática social, se puede ver que el problema de la reprobación de las matemáticas se da en todos los niveles, sin embargo, en el nivel medio superior (bachillerato) es tan grave que ocasiona que los estudiantes de este nivel resuelvan estudiar carreras que no tengan nada que ver con dicha disciplina, sacrificando con ello sus verdaderos intereses profesionales, y con ello, optando a carreras con baja demanda laboral, como menciona para la revista “Alto Nivel México”, el Ing. Gerardo Reinoso, Gerente del área de Contabilidad, Finanzas y TIC en Hays México, el indica que: “las cinco carreras más demandas

en 2013 para empleos en México son: Administración de Empresas, Contabilidad, Ingeniería Industrial, Mercadotecnia y Actuarial” (Smilovitz, 2013), como observamos, todas ellas llevan en sus planes de estudio, contenidos altamente orientados al pensamiento lógico- matemático.

Así mismo, el canal CNN, presentó un artículo en el 2014, donde menciona que de acuerdo a datos que provienen del Departamento de Trabajo de Estados Unidos y de la Oficina de Estadísticas Laborales de Estados Unidos (BLS, por sus siglas en inglés), existen 10 profesiones que están por encima de otras 190, luego de evaluarlas en cinco categorías: ambiente de trabajo, ingresos, perspectivas a futuro, estrés y clasificaciones generales. Según el estudio, que se elabora año con año desde 1988, una de las claves para tener uno de los mejores trabajos son las matemáticas, pues 5 de las 10 profesiones hacen uso de esta materia (CNN, 2014).

Problemática pedagógica

Aprender matemáticas implica el desarrollo de habilidades generales para el manejo, la comprensión y comunicación de datos numéricos, más que el dominio de conceptos y técnicas aisladas e involucra comprensiones globales más o menos amplias. Ya que no es lo mismo poder resolver un problema en específico, que aplicar lo aprendido para poder resolver problemas similares (Moreno, 1998). Al día de hoy existen muchos esfuerzos para atender este vacío de conocimiento que van desde modelos de aprendizaje, diseño instruccional, hasta videojuegos, todos en busca de alguna forma de desarrollar estas habilidades en los alumnos. Sin embargo, el problema persiste y es por eso que buscamos identificar una alternativa de solución que involucre a la adopción de tecnología como soporte de una estrategia diferente para atender la problemática.

La resolución de problemas es una actividad fundamental en el desarrollo de las matemáticas. Se reconoce que los proceso de formulación de problemas, la búsqueda de métodos para resolverlos, los intentos de solución y sus soluciones contribuyen directamente en la construcción y el desarrollo del conocimiento matemático (Santos Trigo, 2014).

La resolución de problemas se ha definido como un proceso cognitivo de orden superior que requiere la detección de pasos o procesos "entre el planteamiento de la tarea y la respuesta". Cuando la información sobre el problema se presenta como texto en lugar de en notación matemática, el problema se vuelve un problema de palabras (Xin et al., 2011).

Otro problema que es muy común en la enseñanza tradicional, debido a que no hay otra opción, es que los docentes transmiten el conocimiento de la misma manera para todos los alumnos, sin considerar que en un mismo grupo existen alumnos con diferentes aptitudes, y con diferentes formas de aprender. Obviamente el pensar en impartir clases de manera más personalizada, dependiendo de las características de aprendizaje de los alumnos se puede ver como una utopía; sin embargo, si utilizamos software educativo como auxiliar del docente, esto se puede ver como una realidad. La idea no es sustituir al docente, sino más bien apoyarlo desde la etapa de identificar las formas de aprendizaje de cada alumno.

1.3.2 Planteamiento del problema

Por lo que se ha mencionado hasta el momento, se puede observar que son muchas las causas que originan los problemas dentro del proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas, las cuales pueden ser áreas de oportunidad para desarrollar herramientas, metodologías, teorías, que pueden ayudar a mejorar la comprensión de las matemáticas. Sin embargo, es imposible abarcar todo en un solo proyecto. Se deben limitar las investigaciones para poder implementar y probar la eficiencia de lo que se proponga. En principio, se está limitando la investigación a solo una parte de las matemáticas, algunos temas específicos de álgebra y además se está enfocando en dos situaciones:

1. Muchas veces, una de las causas del bajo índice de aprovechamiento en el álgebra es que los alumnos no saben resolver problemas, por lo que esto es lo que se está considerando como el principal problema a tratar en este proyecto. En Xin et al. (2011) mencionan que la resolución de problemas es

una perspectiva relevante y significativa y el contexto a través del cual introducir al alumno en el álgebra. El álgebra es esencialmente “una forma sistemática de expresar la generalidad y la abstracción”.

2. En la enseñanza pública tradicional es prácticamente imposible que se puedan dar clases personalizadas, es decir, considerando las características de aprendizaje del alumno, esto debido a diversas circunstancias como son: a) no se cuenta con las herramientas necesarias y b) por lo regular en las escuelas públicas los grupos de alumnos son bastante numerosos. En Faghihi et al. (2014) mencionan que los profesores no pueden individualizar cursos para cada estudiante en un salón de clases por separado, a pesar del hecho de que los estudiantes tienen diferentes niveles de experiencia y requieren diferentes niveles de asistencia.

1.3.3 Propuesta de solución

Como se mencionó anteriormente, en general el problema está relacionado con las deficiencias en el aprendizaje de las matemáticas, sin embargo, como se sabe, dentro de las matemáticas existen diversas áreas, lo cual hace que la dimensión del problema a tratar sea muy extensa, motivo por el cual, y para delimitar los objetivos de este proyecto, se considerará el modelo 3UV para delimitar los temas y los tipos de problemas del álgebra que serán considerados.

Al considerar las dos causas mencionadas anteriormente, la propuesta de solución que se propone en este proyecto es diseñar una herramienta interactiva de software denominada Tutor Cognitivo Inteligente que apoye a los alumnos de nivel medio superior en la resolución de problemas de algunos temas de álgebra, que sea capaz de detectar de manera automática el nivel de experiencia del alumno en la resolución de problemas del tema en cuestión, y en base a esto, que el tutor le pueda proporcionar los tipos de problemas con los que debe trabajar para mejorar su habilidad cognitiva.

Cabe mencionar que la idea del tutor cognitivo no es sustituir totalmente al docente, ya que la idea es que se utilice solo como herramienta para apoyar en el

proceso de evaluación y de asignación de actividades que refuercen la enseñanza proporcionada por el docente, con la ventaja de que el tutor pueda realizar la difícil tarea de evaluar y clasificar al alumno constantemente.

Para el diseño de la herramienta se toma como sustento pedagógico la teoría de la carga cognitiva con dos de sus efectos, el de “expertise reversal” para el nivel de conocimientos del alumno y el de “worked examples” para el manejo de las características de los problemas que se le van a ir presentando al alumno, ya que si la idea es ayudar a los alumnos a comprender como resolver problemas, lo adecuado no es trabajar como habitualmente se acostumbra en las clases tradicionales, mediante una serie de ejemplos en los que el docente o tutor resuelve completamente los problemas y posteriormente se le propone al estudiante que practique resolviendo problemas nuevos. Con esta forma de trabajar, habitualmente lo que el estudiante hace para poder resolver los problemas, es buscar ejemplos similares que ya hayan sido resueltos, y si no los encuentra, muchas veces desiste en su intento de resolverlos, evitando que se logre el objetivo del aprendizaje. Por tal motivo, lo que se requiere en este caso es aplicar una estrategia como la que propone el efecto “worked examples”, en la que los ejemplos deben ser trabajados de tal manera que los pasos resueltos dependan de la habilidad cognitiva en el manejo del tema, con la que el estudiante cuente.

Finalmente, como el objetivo es que el manejo del tipo de problemas / ejemplos sea asignado de manera automática por el tutor cognitivo, se requiere de un modelo inteligente que sea capaz de simular la toma de decisiones. Por lo que se definieron e implementaron dos sistemas de inferencia difusos, uno para la parte de la detección de las características del alumno (nivel de conocimientos) y otro para determinar el tipo de problemas que se le deben ir proporcionando al alumno de tal manera que la herramienta computacional pueda ir dando primeramente ejemplos totalmente resueltos, los cuales pueden ir convirtiéndose en problemas que deban ser resueltos por el alumno. Así mismo se utiliza un mapa cognitivo difuso, para determinar el nivel de avance en cada uno de los

temas de álgebra que se están considerando, propiciando de esta manera que el sistema ayude a los alumnos a construir su propio conocimiento a través de la orientación en la solución de los problemas.

1.3.4 Justificación

Actualmente existen herramientas matemáticas que ayudan a resolver problemas matemáticos, sin embargo, cuando los alumnos los utilizan, no lo hacen con el objetivo de aprender, sino más bien para poder llegar a la solución de los problemas o ejercicios. Incluso hay herramientas que presentan la resolución del problema paso a paso, pero con esto no se está logrando que el alumno trate de razonar y obtener un aprendizaje significativo. Un ejemplo de modelos o herramientas que pueden ser utilizados como un factor de aprendizaje, pueden ser las calculadoras, la cual se podría pensar que es una herramienta equivocada, ya que muchos estudiantes las utilizan para ahorrarse el trabajo de realizar operaciones manualmente, impidiendo de esta manera que las operaciones básicas como suma, resta, multiplicación y división no sean comprendidas. Sin embargo, si se utiliza la calculadora, por ejemplo, para explicarle al alumno el comportamiento de las tablas de multiplicar puede tener un beneficio en la enseñanza de las matemáticas. Con este sencillo ejemplo se trata de dar a entender que la idea no es estigmatizar a las herramientas, más bien tratar de darles una aplicación positiva.

Inicialmente, se pudo haber enfocado la investigación en algunas otras causas que dan origen a las deficiencias en el aprendizaje del álgebra, sin embargo, en base a la revisión del estado del arte, existen diversas investigaciones que mencionan que el estudio de las matemáticas va más allá de la memorización de ciertas reglas o fórmulas para resolver determinados problemas. En particular se resalta la importancia de que los estudiantes participen en los procesos de formulación de preguntas, propongan conjeturas, empleen distintas representaciones, presenten argumentos matemáticos y comuniquen sus resultados (Santos Trigo, 2003). En esta perspectiva resulta

importante construir escenarios de aprendizaje donde el estudiante tenga oportunidad de reflexionar acerca del uso de recursos y procesos del quehacer matemático que le permitan extender y robustecer sus formas de plantear y resolver problemas (Santos Trigo, 2014). El tutor cognitivo que se propone en esta investigación puede funcionar como un escenario de aprendizaje con las características que menciona Santos Trigo.

Por último, se consideró importante manejar la teoría de la carga cognitiva como sustento pedagógico ya que existen diversas investigaciones en las que a través de estrategias teóricas y computacionales se puede medir la carga cognitiva de los alumnos al momento de resolver problemas de diversas áreas de las matemáticas, con lo cual se pueden establecer estrategias que ayuden a minimizar la carga cognitiva y diseñar herramientas más eficientes (Tossavainen, 2009).

1.3.5 Marco Epistémico

En las siguientes subsecciones se describe la hipótesis, el objetivo general y la pregunta de investigación principal y en la Tabla 2 se describen los elementos de la matriz metodológica.

1.3.6 Hipótesis

La hipótesis general del proyecto es:

El desarrollo de un tutor cognitivo inteligente promueve habilidades en la resolución de problemas de álgebra en estudiantes de bachillerato. De la cual se pueden deducir las siguientes hipótesis nula y alternativa:

Ho: No hay diferencias en la habilidad cognitiva para la resolución de problemas de álgebra, entre el antes y el después del diseño instruccional.

Ha: Si hay diferencias en la habilidad cognitiva para la resolución de problemas de álgebra, entre el antes y el después del diseño instruccional.

1.3.7 Pregunta de investigación central

¿Cómo influye una estrategia de diseño instruccional apoyada por tecnología en la habilidad cognitiva para la resolución de problemas?

1.3.8 Objetivo general

Proponer un diseño instruccional para diseñar una estrategia tecnológica que considere el contexto de uso, que ayude en la habilidad cognitiva de un estudiante de educación media superior, para la resolución de problemas de álgebra.

1.3.9 Variables

A partir de la pregunta de investigación, se deduce que las variables a considerar en el proyecto son dos (Ver Tabla 3):

VARIABLE 1: Habilidad Cognitiva Del Estudiante Para Resolver Problemas De Álgebra, se considera como una variable dependiente y se medirá utilizando un modelo analítico combinado con un modelo de lógica difusa mediante el manejo de rúbricas para la resolución de problemas de álgebra basadas en las Taxonomías de Bloom.

VARIABLE 2: Estrategia De Diseño Instruccional, la cual es la propuesta principal del proyecto, ya que a partir del diseño instruccional se construye el tutor cognitivo.

1.3.10 Descripción del contenido

El presente documento está compuesto de la siguiente manera: En el Capítulo 1, se da una descripción general tanto del proyecto como de las teorías y conceptos que se están utilizando como sustento, así como también se describe el planteamiento del problema, la justificación y los objetivos del proyecto.

En el Capítulo 2 se hace un análisis de la revisión del estado del arte, incluyendo artículos del 2010 a la fecha, de los temas que se consideran como relevantes para el sustento teórico del proyecto de tesis. En este capítulo también se incluye un análisis de artículos en base a algunos de los temas y al final, a manera de resumen, se presenta una clasificación de los artículos.

El Capítulo 3 se inicia con un análisis de las teorías y conceptos que se están considerando como base para el proyecto de investigación, se incluyen definiciones recabadas de diversas fuentes bibliográficas y se complementa con un análisis propio, como parte de la disertación del marco teórico.

El diseño metodológico de la tesis se incluye en el Capítulo 4, en el que se describen las etapas de la investigación, la forma en que se llevaron a cabo los experimentos de campo, la población manejada, la forma en cómo se realizó la recolección y procesamiento de los datos.

El Capítulo 5 describe los resultados finales y la discusión de los resultados obtenidos, en base al marco teórico y el estado del arte.

Finalmente, el Capítulo 6 presenta las conclusiones del proyecto de investigación y los trabajos futuros que se pueden derivar de este proyecto.

Tabla 2. Matriz metodológica

SUBPREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN	OBJETIVOS	INSTRUMENTOS DE COLECTA DE DATOS	FUENTES DE INFORMACIÓN	MÉTODO DE ANÁLISIS
1. ¿Qué tipo de teorías fundamenta la construcción de un tutor cognitivo?	Identificar las teorías que fundamentan la construcción de un tutor cognitivo	Tablas	Artículos del estado del arte	Cualitativo
2. ¿Cuál modelo para la enseñanza del álgebra se puede utilizar para sustentar un diseño instruccional basado en la resolución de problemas?	Identificar un modelo para la resolución de problemas de álgebra	Instrumentos de jueceo Taller experimental	Estudiantes Docentes del área de álgebra	Cuantitativo
3. ¿Cómo construir un modelo integral no rígido para evaluar los estilos de aprendizaje y la habilidad cognitiva para la resolución de problemas en los estudiantes?	Desarrollar un modelo integral no rígido para evaluar los estilos de aprendizaje y la habilidad cognitiva de los estudiantes	Rúbricas	Estudiantes	Cuantitativo
4. ¿Qué diseño instruccional responde al modelo integral no rígido?	Determinar el diseño instruccional que responde al modelo integral no rígido	Estrategias de enseñanza de problemas	Estudiantes de	Cuantitativo
5. ¿Qué resultados se obtendrán en las habilidades cognitivas para resolver problemas de álgebra en alumnos de nivel medio superior antes y después de aplicar el diseño instruccional?	Evaluar las habilidades cognitivas para resolver problemas de álgebra de alumnos de nivel medio superior antes y después de aplicar el diseño instruccional	Rúbricas basadas en el modelo 3UV	Estudiantes	Cuantitativo
6. ¿Qué modelo inteligente permitirá establecer el tipo de problemas y entrenamiento que se le proporcionará al aprendiz, de forma dinámica e interactiva?	Definir un modelo inteligente que permita establecer el tipo de problemas y entrenamiento que se le proporcionará al aprendiz, de forma dinámica e interactiva	Rúbricas evaluadas por el sistema de inferencia difuso y por los mapas cognitivos difusos	Estudiantes	Cuantitativo

Tabla 3. Operacionalización de las variables del proyecto de investigación

VARIABLES	DIMENSIONES	INDICADORES	CATEGORÍAS	REACTIVOS GUÍA
HABILIDAD COGNITIVA <i>(Variable dependiente)</i> Variaciones de los niveles de umbral que dependen de la dificultad de una tarea cognitiva cuando un individuo la desempeña con éxito (Carroll, 1993).	Niveles de umbral cognitivo	Variable lingüística	Excelente Bueno Medio Pasable Fallido	Se aplicó un modelo difuso con valores de entrada obtenidos por un modelo analítico basado en la taxonomía de Bloom.
	Desempeño exitoso de una tarea cognitiva	Taxonomía de Bloom	Crear Evaluar Analizar Aplicar Entender Recordar	Se aplicaron instrumentos basados en el modelo 3UV y evaluados con un modelo analítico.
ESTRATEGIA DE DISEÑO INSTRUCCIONAL <i>(Variable independiente)</i> Se refiere a las acciones a seguir durante un proceso sistemático y reflexivo de traducir los principios del aprendizaje y la enseñanza en los planes de los materiales de instrucción, actividades, recursos de información y la evaluación (Özata Yücel y Özkan, 2015) (Smith y Ragan, 1999)	Materiales de Instrucción	Enfoque de “worked examples”	Básico (pasos resueltos) Medio (pasos resueltos) Avanzado	Se analizaron diversos algoritmos para poder automatizar la retroalimentación en las sugerencias de actividades para la resolución de problemas, así como para los tipos de materiales y recursos a usar
	Actividades	Manejo de problemas reales	Difíciles No muy difíciles Fáciles	
	Recursos de Información	Número de objetos de aprendizaje	Pocos Regular Muchos	

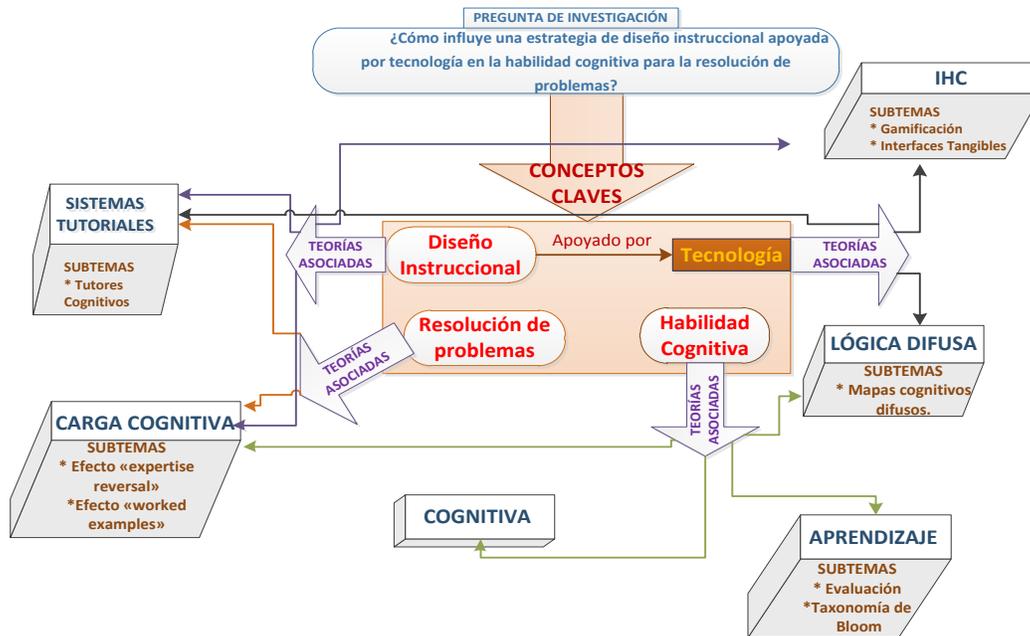
CAPÍTULO 2. ESTADO DEL ARTE

El análisis del estado del arte del proyecto de tesis, inicia con la identificación de los conceptos claves de la investigación que también sirvieron de base para la construcción del marco teórico que se describe en el Capítulo 3. En el Esquema 1 se identifican los conceptos claves, a partir de la pregunta de investigación principal de la tesis, dichos conceptos son: Diseño Instruccional, Habilidad Cognitiva Y Resolución De Problemas, además de hacer mención que el diseño instruccional será apoyado por Tecnología, el cual es un concepto que permite relacionar las teorías de la investigación con la implementación del proyecto.

Partiendo de lo que se muestra en el Esquema 1, se puede observar que **el diseño instruccional**, está relacionado con los Sistemas Tutoriales Inteligentes (STI), la Teoría de la Carga Cognitiva (TCC), la Interacción Humano, Computadora (IHC) y el Aprendizaje. Los STI son el medio por el cual se va a automatizar el diseño instruccional, de ahí su relación, y la TCC es el sustento pedagógico, a partir del cual se genera el diseño instruccional, con la IHC su relación se da, porque el diseño instruccional que se propone está basado en estrategias de juegos (gamificación) a través de interfaces tangibles y, por último, el diseño instruccional tiene como objetivo apoyar el aprendizaje, a través de estrategias de evaluación basadas en modelos inteligentes. Así mismo, como se propone un diseño instruccional basado en estrategias de juegos y modelos inteligentes, para simular la toma de decisiones en el sistema tutor, entonces surge la relación con la **tecnología**, la cual en este caso debe considerar la IHC y la lógica difusa.

El siguiente concepto, la **resolución de problemas**, surge en principio porque, de acuerdo a diversas investigaciones, la enseñanza de las matemáticas debe ser reforzada con la resolución de problemas y en la TCC, uno de sus efectos, el de “worked examples”, ayuda a sustentar el diseño instruccional basado en la resolución de problemas, Así mismo, la relación de la resolución de problemas con los STI se da, porque exactamente lo que se está desarrollando es

un tutor cognitivo, que es un sistema automatizado, enfocado en apoyar a los alumnos en la resolución de problemas de álgebra.



Esquema 1. Identificación de los conceptos claves del proyecto de tesis, a partir de la pregunta de investigación y su relación con las teorías que sustentan el proyecto de Tesis. Fuente: Diseño propio.

En la **habilidad cognitiva**, se consideran necesarias, la Teoría de la Carga Cognitiva, la Teoría Cognitiva en general, el Aprendizaje y la Lógica Difusa, ya que las dos primeras teorías tienen mucho sustento del comportamiento cognitivo de los estudiantes, durante el proceso de enseñanza – aprendizaje. Así mismo, su relación con la teoría del aprendizaje surge a partir del hecho que el objetivo del aprendizaje está muy relacionado la necesidad de mejorar la habilidad cognitiva de los estudiantes. Por último, dentro del aprendizaje, siempre surge la necesidad de “medir” los avances y logros que un estudiante vaya obteniendo, por lo cual, surge la necesidad de manejar modelos o estrategias que nos permitan hacerlo de manera automatizada, y la lógica difusa, nos proporciona la teoría necesaria para este fin.

Dentro del análisis del estado del arte, primero se realizó una clasificación por temas de diversos artículos, por lo que las secciones del Capítulo 2, se

dividieron en base a los temas y en cada una se muestra una descripción breve de los artículos. Al final del capítulo se muestra una tabla general, con la clasificación de todos los artículos revisados, en la que se indica, los temas principales de cada uno de los artículos, esto con la finalidad de identificar las investigaciones que consideran más de uno de los temas relacionados con esta tesis, y de esta manera, visualizar las áreas de oportunidad para el desarrollo de trabajos futuros, que sirvan de continuidad del presente proyecto de investigación.

2.1 Revisión de la literatura

2.1.1 Trabajos relacionados con el modelo del estudiante

Dentro de la literatura existen diversos trabajos relacionados con la detección automática de los estilos de aprendizaje del estudiante, a través de diversas herramientas de cómputo. En principio, uno de los trabajos que contienen una revisión extensa sobre técnicas para la detección de los estilos de aprendizaje, es el que se muestra en (Feldman, Monteserin, y Amandi, 2014), en el que los autores mencionan que la forma tradicional de identificar estilos de aprendizaje es usar una prueba o cuestionario; sin embargo, a pesar de ser confiables, estos instrumentos presentan algunos problemas que dificultan la identificación del estilo de aprendizaje. Algunos de estos problemas incluyen la falta de motivación de los estudiantes para completar un cuestionario y la falta de conciencia de sus preferencias de aprendizaje. Por lo tanto, los autores realizan una revisión del estado del arte en el que muestran un análisis de diversas técnicas para la detección automática de estilos de aprendizaje. Algunas de las técnicas que mencionan tienen que ver con modelos usados en la computación inteligente, como son: árboles de decisión, redes bayesianas, redes neuronales, modelos ocultos de Markov, por mencionar algunos (Feldman et al., 2014). Así mismo, Jegatha Deborah, Baskaran, y Kannan (2014) también consideran una revisión de algunas técnicas para la detección de los estilos de aprendizaje, pero más

enfocadas al uso de la teoría de la lógica difusa, mediante el manejo de modelos con reglas difusas.

Otra característica que está siendo analizada, en relación a los estilos de aprendizaje, es el estado afectivo de los estudiantes, Zatarain-Cabada, Barrón-Estrada, Camacho, y Reyes-García (2013) proponen un sistema tutorial inteligente (STI) en el que, a través de expresiones, pueden detectar siete emociones básicas en el estudiante, las cuales son, miedo, disgusto, enojo, felicidad, sorpresa, aburrimiento, y estado neutral. El análisis de las expresiones lo realizan a través de una red de Kohonen, entrenada con una base de datos que contienen las expresiones de diferentes caras.

Como parte del modelo del estudiante, la habilidad cognitiva, es otra característica importante que se debe estar analizando constantemente. En el trabajo de (Haciomeroglu, 2015) realizan un estudio para determinar si existe una correlación entre las habilidades cognitivas y las habilidades de visualización espacial, las habilidades de razonamiento lógico – verbal, y las habilidades para resolver problemas de matemáticas, lo cual puede ser la base para generar herramientas o modelos que permitan clasificar al alumno en cuanto a sus habilidades cognitivas. La detección de la habilidad cognitiva, es de suma importancia en el diseño de tutoriales inteligentes, por lo que, Barrón-Estrada, Zatarain-Cabada, Beltrán V., Cibrian R., y Hernández Pérez (2012) incluyen dentro de un sistema tutorial inteligente para la enseñanza de las matemáticas, denominado Fermat, un módulo para detectar la habilidad cognitiva, a través de pruebas de diagnóstico. Sin embargo, la evaluación de la habilidad cognitiva, puede ser un tema un tanto subjetivo, y que, además, si se desea implementar dentro del módulo de un STI, se debe tener un modelo que proporcione las pautas para clasificar al alumno y que se pueda almacenar de manera digital, por lo que el modelo que Rongmei y Lingling (2009) proponen, sirve de base para la clasificación del alumno, a través de su habilidad cognitiva. Dicho modelo está basado en la Taxonomía de Bloom y puede ser evaluado mediante un modelo analítico y posteriormente, aplicarle un modelo difuso que permite clasificar al alumno (Rongmei y Lingling, 2009).

2.1.2 Investigaciones relacionadas con la Teoría de la Carga Cognitiva y sus efectos

Existen diversas investigaciones relacionadas con la Teoría de la Carga Cognitiva (TCC), sin embargo, dentro del contexto de la presente investigación, se consideran de suma importancia, las que están relacionadas, tanto con experimentos que tienen que ver con el manejo de la carga cognitiva, en la enseñanza – aprendizaje de las matemáticas, como con la resolución de problemas y el manejo de herramientas computacionales que consideran como base esta teoría.

De los trabajos que tienen que ver con el manejo y medición de la carga cognitiva, se puede hacer mención del trabajo presentado en (Yung y Paas, 2015) en el que los autores afirman que numerosos estudios han demostrado que el expertise del estudiante es un factor crítico para el diseño instruccional en matemáticas. En un experimento en el que manejaron representaciones visuales se confirmó la hipótesis de que las representaciones visuales producen mayor rendimiento en el aprendizaje y menor carga cognitiva. Por su parte, Ngu, Yeung, y Tobias, (2014) realizan un experimento para la comprensión del tema de porcentajes en matemáticas, aplicando el sustento que trabaja la teoría de la carga cognitiva, mediante el uso de una herramienta instruccional, en sustitución de lo que un experto en matemáticas usa para la representación del conocimiento abstracto, esto es, un esquema. Los resultados que los autores obtuvieron ayudan a sustentar el uso de herramientas instruccionales como auxiliares en la enseñanza de las matemáticas, para disminuir la carga cognitiva en los estudiantes.

En cuanto a la relación de la TCC con la resolución de problemas, Chen et al. (2015) presentan una serie de experimentos relacionados con la resolución de problemas de geometría, en los que sustentan la importancia de hacer que los alumnos trabajen con ejemplos “trabajados”, es decir, ejemplos en los que el nivel de dificultad esté de acuerdo con el nivel de experiencia del alumno, lo cual

conlleva a trabajar con materiales con un alto contenido de interacción, resultando ser un tipo de instrucción superior que los de baja orientación.

Por último, algunas investigaciones en la que se implementa una herramienta computacional para determinar la carga cognitiva en el proceso de enseñanza – aprendizaje, son las que se presentan en (Cheng, Lu, y Yang, 2015) y en (Rey y Andreas, 2013). En la primera, los autores realizan un estudio que permite identificar, de qué manera se pueden desarrollar interfaces multimedia que no aumenten la carga cognitiva de los estudiantes, evitando de esta manera la inhibición del aprendizaje. Los resultados experimentales muestran que el sistema de enseñanza de múltiples pantallas propuesto en este documento tiende realmente a disminuir la carga cognitiva y mejorar eficazmente el rendimiento de aprendizaje. En la segunda, Los autores investigan el efecto “expertise reversal” en relación a las explicaciones instruccionales en el contexto de un programa de computadora sobre el análisis de datos estadísticos. Como resultado concluyen que Los principiantes que reciben explicaciones instruccionales mostradas durante la presentación de resultados en un programa estadístico, realizan un rendimiento marginalmente mejor en transferencia que los novatos que no reciben explicaciones.

2.1.3 Trabajos relacionados con la Valoración y/o Evaluación

Aunque el tema de la valoración o evaluación, en la mayoría de las investigaciones se muestran como parte de otros temas, es importante identificar las estrategias que se usan para la evaluación educativa, mediante herramientas automatizadas.

En principio, Goksu y Ph, (2016) proponen un sistema experto basado en la web para realizar un análisis y proporcionar informes de las dimensiones del proceso cognitivo de los estudiantes mediante la taxonomía de Bloom revisada. Por su parte en (Barón et al., 2015) presentan un sistema para la evaluación del

aprendizaje que utiliza un análisis multivariado basado en el modelado de ecuaciones estructurales usando mapas cognitivos difusos como herramienta. Otra investigación en la que consideran un ambiente de aprendizaje y evalúan el conocimiento adquirido es la que presentan en (Sharma y Chawla, 2014), en la cual, utilizan mapas conceptuales, tanto para crear el ambiente de aprendizaje, como para estudiar y comparar diferentes métodos de evaluación disponibles para medir el conocimiento conceptual y las habilidades adquiridas al aplicar el conocimiento conceptual en escenarios prácticos.

En el artículo de (Hassan, 2011), los autores argumentan que es importante desarrollar una forma de evaluación que se enfoque tanto en las descripciones cualitativas del proceso de aprendizaje del alumno (evaluación de proceso) como en información cuantitativa (evaluación del producto). Como un sistema de clasificación de objetivos educativos, una taxonomía está diseñada para operar en un determinado contexto controlado; por lo que los autores proponen que las taxonomías son una herramienta útil para la evaluación de los estudiantes, ya que actúan como un sistema de clasificación de los objetivos educativos basados en el nivel de entendimiento del estudiante, necesario para lograr los resultados del aprendizaje. A su vez, Johanyák (2010) menciona que en el caso de exámenes no automatizados, la evaluación de los logros académicos de los estudiantes implica en varios casos la consideración de impresiones y otros elementos subjetivos que pueden conducir a diferencias entre las puntuaciones dadas por diferentes evaluadores. La vaguedad inherente de este proceso, hace de esta área un campo de aplicación natural para los métodos basados en la teoría de conjuntos difusos con el objetivo de reducir las diferencias mencionadas. De acuerdo a lo que se menciona en estos dos últimos artículos, se puede apoyar el uso tanto, de la Taxonomía de Bloom, como de los modelos difusos para el proceso de evaluación, aunque, es evidente, que pueden existir otras técnicas para la implementación de herramientas automatizadas que ayuden en el proceso de evaluación.

2.1.4 El Diseño Instruccional como objetivo de algunas investigaciones

En el aprendizaje de las matemáticas, un diseño instruccional adecuado puede ayudar a construir el esquema que permitirá almacenar la información en la memoria a largo plazo y a su vez ayudar también a evitar sobrecargar la memoria de trabajo. Existen diversas investigaciones que proponen diseños instruccionales, incluso existen teorías que proponen modelos a seguir para un diseño instruccional adecuado. A manera de ejemplo, se puede mencionar el trabajo de (Jurdak, 2016), en el cual, los autores mencionan que la actividad de la enseñanza de las matemáticas en la escuela, es el proceso por el cual el maestro está motivado para enseñar competencias y conceptos matemáticos por medio de acciones que estén subordinadas conscientemente, a la meta matemática prevista, utilizando las operaciones que están mediadas y limitadas por los artefactos (físicos y simbólicos) que son accesibles en las condiciones objetivas del contexto sociocultural de la escuela en cuestión. Bajo este enfoque, proponen un plan basado en objetivos instruccionales para la resolución de problemas del mundo real en escuelas de matemáticas.

Otro ejemplo de diseño instruccional es el que proponen en (Ngu et al., 2014), el cual está relacionado con temas que tienen que ver con problemas de cambio porcentual, el diseño instruccional tiene como objetivo guiar a los alumnos en el proceso de elaboración de conocimiento a través del cual puedan integrar una estructura que les ayude a formar el esquema de conocimiento correspondiente. Una vez adquirido el esquema, proponen prácticas que tienen como objetivo, ayudar a automatizar el esquema adquirido y de esta manera, lograr un aprendizaje profundo. A su vez, en el artículo de (Rey & Andreas, 2013), los autores enfatizan la importancia del efecto “expertise reversal” en los diseños instruccionales y realizan un experimento basado en el manejo de un software para el análisis de datos estadísticos. El experimento es de tipo factorial de 2 x 2, con dos factores de expertise (novatos y expertos) y considerando explicaciones instruccionales (con y sin). Concluyen que los novatos que recibieron

explicaciones instruccionales se desempeñaron mejor que los novatos que no las recibieron y los expertos que recibieron explicaciones instruccionales diseñadas para novatos, tuvieron un peor desempeño que los expertos que no las recibieron.

2.1.5 La Enseñanza del Álgebra en investigaciones

Existen diversas investigaciones relacionadas con la enseñanza del álgebra, algunas incluidas en proyectos que tienen que ver con herramientas computacionales y otras relacionadas con modelos pedagógicos. En principio, una herramienta computacional para la enseñanza del álgebra, es la que se describe en (Matsuda, Cohen, y Koedinger, 2015), dicha herramienta es un tutor cognitivo, al que denominan "SimStudent", capaz de proporcionar retroalimentación inmediata. Una de sus características notables es su capacidad de aprender de forma interactiva de un modelo experto a través de la resolución de problemas dirigidos. A este tipo de programación interactiva los autores le llaman "programación por tutoría" en contraste con la programación por demostración, en la cual el autor demuestra simplemente soluciones mientras SimStudent pasivamente generaliza soluciones mostradas sin ninguna información sobre la exactitud de la generalización.

Faghihi et al. (2014) proponen otro tipo de herramienta computacional en la cual incluyen gamificación. El diseñar herramientas computacionales relacionadas con la gamificación es un reto, ya que los alumnos deben identificar y diferenciar entre los elementos del juego, los aspectos de las actividades que no son juegos las metas de los alumnos y sus propios deseos. En el artículo presentan los avances de un proyecto relacionado con el manejo de video juegos y técnicas de sistemas tutoriales con inteligencia artificial para enseñar conceptos matemáticos del álgebra como factorización y la fórmula para resolver ecuaciones cuadráticas. Dentro de la misma trayectoria del diseño de herramientas computacionales con gamificación se puede hacer mención a la que proponen en (Long y Alevan, 2014), la cual consiste de un sistema tutor para la enseñanza de ecuaciones lineales denominado Lynnette. Como resultados del experimento, demuestran que

las formas de control de problemas compartidos gamificados en un STI no tienen efectos perjudiciales. Además, descubrieron que la combinación de recompensas basadas en el rendimiento y la libertad de re-práctica, ambos patrones comunes en el diseño de juegos, es perjudicial para el aprendizaje cuando se incluyen en un STI.

Otra perspectiva de herramientas computacionales pueden ser los tutores inteligentes para el aprendizaje colaborativo y adaptativo, los cuales tienen la característica de apoyar y modelar el aprendizaje colaborativo, que tiene como aspecto importante del aprendizaje la construcción social del conocimiento, donde los estudiantes intercambian ideas, reflexionan sobre sus propios conceptos erróneos y llegan a un entendimiento compartido a través del diálogo con sus pares. La implementación y uso de un sistema con estas características, para la enseñanza del álgebra, es el que describen en (Walker, Rummel, y Koedinger, 2014), y en base a los resultados que obtuvieron, los autores argumentan que los estudiantes en las condiciones de apoyo adaptativo aprendieron más que los estudiantes en condiciones no adaptativas. A medida que aumentó la cantidad de apoyo que los estudiantes recibieron, la diferencia entre la condición adaptativa y las condiciones no adaptativas se hizo más evidente.

Desde el punto de vista pedagógico de la enseñanza del álgebra, se pueden mencionar dos investigaciones, la de (Álvarez, Chacón, y Ursini, 2015) y la de (Zeljčić, 2015). En la primera, hacen referencia a un modelo para clasificar los problemas de álgebra con base en tres usos de la variable (como incógnita, como número general y como función). Utilizando este modelo realizan un estudio comparativo de las habilidades para la resolución de problemas relacionados con estos tres usos de la variable, en estudiantes de España y de México. Encuentran que más del 50% de los alumnos mexicanos tienen problemas para simbolizar un problema de palabras en el cual aparece la variable como incógnita. En el segundo estudio, los autores realizan un experimento para demostrar que, incluso con los estudiantes más jóvenes de la escuela primaria es posible desarrollar una comprensión estructural de la idea de representación de una variable con una

letra, que es un fundamento para el desarrollo de conocimientos y habilidades algebraicas. Con esto pretenden concebir y analizar las estrategias de enseñanza que están orientadas a superar la "brecha cognitiva" en el proceso de desarrollo y la vinculación de la aritmética y las generalizaciones algebraicas.

2.1.6 Investigaciones sobre la Resolución de Problemas

En lo que se refiere a estudios relacionados con la resolución de problemas que contemplan diversas estrategias que tienen la finalidad de analizar mecanismos para mejorar la habilidad de los alumnos en esta difícil tarea, se pueden mencionar investigaciones relacionadas con experimentos basados en diversas estrategias o investigaciones relacionadas con algoritmos, métodos o herramientas para implementar mecanismos automatizados que generen procesos para ayudar al alumno en dicha tarea. El objetivo de considerar una revisión de la literatura en este tema es muy importante para el proyecto de investigación, ya que existen estudios que han probado la eficiencia de diversos algoritmos para automatizar el proceso de ayuda a los alumnos en la resolución de problema.

De esta manera, se hace referencia al artículo de (Bailey y Taylor, 2015), en el cual los autores mencionan que en matemáticas, "la enseñanza ambiciosa" se refiere a apoyar a todos los estudiantes para desarrollar la comprensión conceptual, la fluidez procesal, la competencia estratégica y el razonamiento adaptativo para resolver problemas auténticos. La enseñanza a través de la resolución de problemas se considera una práctica de enseñanza de alto aprovechamiento. Por lo tanto, el experimento que se muestra en el artículo está basado en un tema matemático relacionado con el pensamiento algebraico y modelan la enseñanza del álgebra usando el enfoque de resolución de problemas. Otro estudio relacionado con la resolución de problemas de álgebra, es el que presentan en (Eisenmann, Novotná, Přebyl, y Břehovský, 2015), el cual tuvo como objetivo principal comunicar los resultados de un estudio de investigación longitudinal realizado en tres aulas Checas. Los alumnos fueron expuestos a la utilización de determinadas estrategias heurísticas en la resolución de problemas

matemáticos por un período de 16 meses. La investigación muestra que, si a los alumnos se les enseña a utilizar algunas estrategias heurísticas, lo ideal sería resolver un número relativamente elevado de problemas.

Por otra parte, en relación con algoritmos para la resolución de problemas, se hace referencia al trabajo de (Piech, Huang, Sahami, y Guibas, 2015), en el cual los autores proponen una serie de algoritmos que pueden predecir la forma en que un profesor experto podría proponer sugerencias para apoyar la retroalimentación en la resolución de problemas. Esto con la idea de generar una herramienta automática que pueda tomar decisiones para cualquier solución parcial que conduzca a una siguiente solución parcial que el estudiante debe tomar.

En relación a herramientas computacionales para la resolución de problemas, está el trabajo de (Kramarski y Friedman, 2014) en el que los autores hacen un análisis de la importancia de aplicar meta-cognición y auto-regulación en Ambientes de Aprendizaje Basados en Computadora (AABC) y en tutoriales inteligentes. El objetivo principal de este estudio fue comparar el valor agregado de usar dos tipos de indicaciones -no solicitadas (forzadas) y -solicitadas (libres) en un programa multimedia. Realizaron una comparación con un programa multimedia regular sin ninguna ayuda meta-cognitiva. En todos los tipos de programa, los estudiantes trabajaron en parejas. El estudio evaluó varios aspectos: efectos sobre la resolución problemas matemáticos, efectos meta cognitivos, esfuerzos mentales, y la relación con la multimedia.

2.1.7 Lógica Difusa como tema de algunas investigaciones relacionadas con sistemas educativos

Son muchas las aplicaciones que se pueden generar con el manejo de modelos de la lógica difusa, incluso, si se combinan con las redes neuronales se pueden obtener sistemas con capacidades de aprender y tomar decisiones, sin embargo,

de acuerdo al contexto de la investigación, se hace énfasis con algunas que tienen que ver con sistemas educativos.

En el artículo de (Sweta y Lal, 2017), los autores proponen algunas estrategias adaptativas, como la detección dinámica y automática de los estilos de aprendizaje. Las estrategias tienen ventajas en términos de precisión y tiempo invertido. Es un enfoque basado en la literatura en el que construyen un modelo de aprendizaje adaptativo personalizado (PALM). El modelo de aprendizaje que proponen explota los datos de acceso de navegación de los alumnos y encuentra los patrones de comportamiento que individualizan a cada alumno y proporcionan una personalización de acuerdo con sus estilos de aprendizaje en el proceso de aprendizaje. Utilizaron mapas cognitivos difusos y sistemas de inferencia difusa para implementar PALM. Por su parte, Chrysafiadi y Virvou, (2013) proponen un sistema tutorial adaptativo. El término adaptativo es porque tiene la característica de proporcionar al estudiante, el material de aprendizaje del tema en cuestión, teniendo en cuenta sus necesidades de aprendizaje y su diferente ritmo de aprendizaje. Este proceso lo realizan utilizando mapas cognitivos difusos para modelar el comportamiento del alumno. El enfoque de representación de conocimiento propuesto lo implementan en un sistema de adaptación de aprendizaje electrónico para la enseñanza de la programación.

2.1.8 La Retroalimentación (Feedback) en el ámbito de investigaciones relacionadas con la educación

Una de las características de un tutor cognitivo, es la capacidad de evaluar o marcar como correctas o incorrectas sus interacciones y participaciones con el tutor, lo cual se logra mediante la automatización de procesos de retroalimentación. (Rivers y Koedinger, (2014), proponen un algoritmo para generar retroalimentación automatizada dentro de algún dominio. Para el algoritmo, primero consideran una colección de estados de solución, donde cada estado está representado como una estructura de árbol y tiene datos sobre cuántos estudiantes lo han generado antes. Después utilizan un método para

probar las etapas de las soluciones y al final utilizan un método para comparar los estados de solución. Otro trabajo en el que implementan la retroalimentación de manera automatizada, es el de (Stamper, 2011). El prototipo que los autores implementan lo denominan “la fábrica de sugerencias”, cuyo objetivo es hacer que los tutores inteligentes sean más accesibles mediante la simplificación de su creación usando minería de datos educativa y técnicas de aprendizaje automático.

Razzaq y Heffernan, (2010) describen un estudio que compara el hecho de dar sugerencias de manera proactiva, en un sistema tutorial, cuando los estudiantes cometen errores con el hecho de exigir a los estudiantes que pidan una pista cuando ellos la requieren. Los autores encontraron que los estudiantes de secundaria que trabajan en problemas de álgebra lo hicieron significativamente mejor con sugerencias sobre demanda y teniendo el control sobre cuándo ver una sugerencia en comparación con el mostrar una sugerencia cuando cometían un error.

2.1.9 Trabajos relacionados con la Interacción Humano - Computadora

La gamificación y las interfaces tangibles son dos temas que están generando inquietudes dentro del proceso de enseñanza – aprendizaje debido a la cuestión de si las estrategias usadas en los juegos y la combinación de elementos no virtuales con virtuales, ayudan o perjudican el desempeño de los estudiantes en el aprendizaje.

(Guerrero, Ayala, Mateu, Casades, y Alamán, 2016) es un artículo que presenta un estudio piloto sobre el uso de dos nuevas interfaces tangibles y mundos virtuales para la enseñanza de Geometría en una escuela secundaria. Los autores presentan dos recursos que han sido desarrollados para ser utilizados como interfaces tangibles para la creación de aplicaciones educativas de realidad mezclada. La arquitectura de este ambiente de realidad mixta está basada en un

software táctil virtual que permite integrar diferentes tipos de interfaces tangibles y diferentes tipos de tecnologías de hardware con mundos virtuales.

En relación a la gamificación, se hace mención a las investigaciones mostradas en Hanus y Fox (2015) y en Long y Alevan (2014). En la primera, el objetivo de la investigación fue crear un ambiente de clase incorporando elementos de gamificación, que la teoría indica que pueden ser problemáticos: tableros, insignias, y sistemas de incentivos. Realizaron un estudio longitudinal para evaluar cómo estos elementos gamificados afectan la satisfacción de los estudiantes, la motivación, el disfrute, la potenciación de aprender, y los grados en el tiempo. Los resultados sugieren que algunos mecanismos comunes usados en la gamificación en el aula (es decir, contexto competitivo, insignias y tablas de clasificación) pueden dañar algunos resultados educativos. Y en la segunda, diseñan una estrategia para un sistema tutor inteligente, enfocándose en una forma de control compartido en el que el sistema selecciona los tipos de problemas y decide cuando los estudiantes han dominado cada tipo de problema y pueden pasar al siguiente, mientras que el estudiante selecciona los problemas individuales de un determinado tipo de problema. Las estrategias de gamificación las incluyen en la posibilidad de volver a hacer problemas después de que se han completado, esto con el objetivo de generar recompensas, pero cuidando siempre que no se afecte el aprendizaje.

2.2 Clasificación de artículos del estado del arte

Finalmente, como parte del análisis general del estado del arte se realizó una clasificación de 78 artículos, del 2011 a la fecha. En la Tabla 4, se muestran las referencias de los trabajos ordenados cronológicamente, estos artículos fueron seleccionados porque incluyen dos o más de los temas analizados en este trabajo. En la primera columna de la Tabla 4 se le asigna un número secuencial a cada artículo, la segunda columna indica la referencia al artículo y los números de las otras columnas, hacen referencia a los siguientes temas: 1. Sistemas Tutoriales o entornos de aprendizaje. 2. Teoría de la Carga Cognitiva o Teoría Cognitiva; 3. Valoración o evaluación; 4. Diseño instruccional o aprendizaje; 5. Álgebra o Enseñanza de Matemáticas; 6. Resolución de problemas; 7.

Retroalimentación o Sugerencias; 8. Interacción Humano-Computadora; 9. Modelo del estudiante y 10. Sistemas difusos o sistemas inteligentes. Después de la columna correspondiente al tema 10, se añadió una columna que indica el impacto de cada artículo consultado en septiembre de 2017.

2.2.1 Análisis de la clasificación de artículos

Uno de los temas principales de esta revisión del estado del arte tiene que ver con los Sistemas Tutoriales Inteligentes, pero si incluimos la parte del sustento pedagógico, debe considerarse también el tema de la Teoría de la Carga Cognitiva, por lo que analizando la clasificación de la Tabla 4, se observa que el 43% de los artículos se relacionan con STI y el 30% con el tema de TCC, pero lo realmente interesante para visualizar las áreas de oportunidad en el desarrollo de los STI con sustentabilidad cognitiva pedagógica son las investigaciones que incluyen estos dos temas, que son sólo el 5%, lo que significa que hay una gran área de oportunidad para desarrollar proyectos que incluyan estos dos temas. Así mismo, uno de los temas incluidos en el 95% de los artículos es el diseño instruccional o enseñanza - aprendizaje, evidentemente porque las principales aplicaciones tanto de STI como de la TCC están relacionadas con la enseñanza - aprendizaje. En cuanto a los temas que cada artículo contiene, la clasificación es la siguiente (Gráfica 1): 17% se relaciona con 2 de los 10 temas, 36% con 3 temas; el 33% con 4 temas, el 11% con 5 temas y sólo el 3% incluye 6 de los 10 temas, es decir, ningún trabajo considera más de 6 temas, por lo que el desarrollo de investigaciones que incluyan 7,8,9 o todos los temas son también áreas de oportunidades para futuros proyectos de investigación. En la Tabla 5 se listan los 6 temas que contienen los 2 artículos que corresponden al 3% de los que contienen más temas.

La Tabla 6 muestra los 5 artículos con mayor factor de impacto de los 78 analizados, en la que se observa que la gamificación es el tema del artículo con mayor factor de impacto.

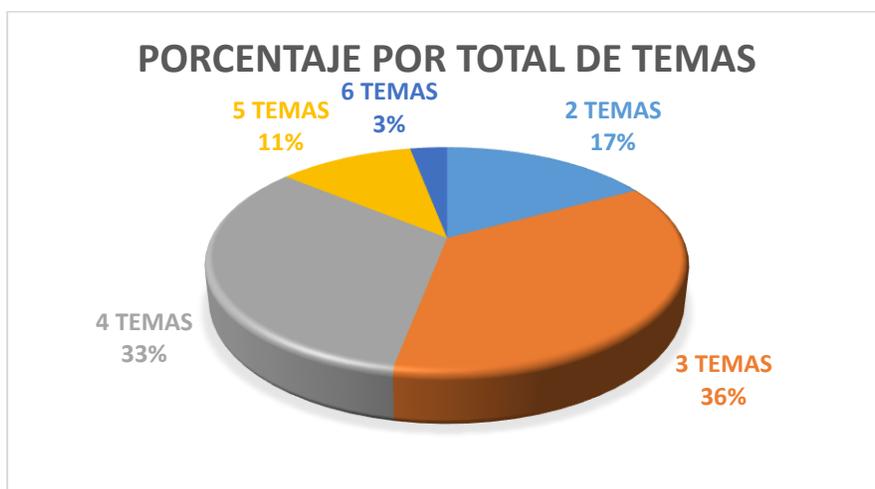
Tabla 4. Análisis y clasificación de diversos artículos en base a los diez temas base de la investigación

#	Referencia	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Im	#	Referencia	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Im
1	(Sweta y Lal, 2017)	x			x						x	1	40	(Mendonça, et al., 2014)		x								x	48
2	(Goksu y Ph, 2016)			x	x						x	1	41	(Ngu, et al., 2014)		x		x		x					12
3	(Grover, et al., 2016)			x	x	x						2	42	(Peña-Ayala et al., 2014)	x			x					x	x	1
4	(Guerrero, et al., 2016)		x		x	x			x			0	43	(Rivers, et al., 2014)	x			x			x			x	35
5	(Jurdak, 2016)				x	x						0	44	(Roll, et al., 2014)	x		x	x	x	x	x				33
6	(Millis, et al., 2016)	x			x				x			1	45	(San Pedro, et al., 2014)	x		x	x	x				x		13
7	(Mozelius, et al., 2016)				x			x	x			0	46	(Seaborn & Fels, 2014)	x			x				x			327
8	(Ramirez- N,et al., 2016)	x		x	x						x	1	47	(Sharma, et al., 2014)			x	x		x			x		1
9	(Sajirli, 2016)				x	x						1	48	(Tzohar- Rozen, 2014)			x	x	x	x			x		7
10	(Alvarez, et al., 2016)			x	x	x	x					1	49	(Walker, et al., 2014)	x			x	x		x		x		26
11	(Bailey , et al., 2015)				x	x	x					3	50	(Alzahrani, et al., 2013)		x		x		x					6
12	(Barón et al., 2015)			x	x				x		x	4	51	(Chrysafiadi et al., 2013)	x			x				x		x	20
13	(Bossomaier, 2015)			x	x				x			0	52	(Francisco, et al., 2013)		x						x	x		18
14	(O. Chen, et al., 2015)		x		x	x						17	53	(Kulkarni, et al., 2013)			x	x				x			195
15	(Cheng, et al., 2015)		x		x				x			5	54	(Lach, 2013)	x	x	x	x					x	x	9
16	(Cuendet, et al., 2015)				x				x			9	55	(Mavrikis, et al., 2013)	x			x	x			x		x	41
17	(Eisenmann, et al., 2015)		x		x							3	56	(Reed, et al., 2013)	x	x		x	x						10
18	(Hanus y Fox, 2015)			x	x				x			242	57	(Reimann, et al., 2013)	x		x	x		x					27
19	(Hong y Kim, 2015)				x	x	x					4	58	(Rey, et al., 2013)		x		x							20
20	(Matsuda, et al., 2015)	x			x	x	x				x	36	59	(Roelle, et al., 2013)		x		x							15
21	(Mukhtar, 2016)	x			x				x			0	60	(Schwonke et al., 2013)	x	x		x	x						25
22	(Piech, 2015)			x	x		x	x				31	61	(Starcic, et al., 2013)	x			x	x			x			28
23	(Bodyanskiy, et al., 2015)				x						x	1	62	(Zatarain, et al., 2013)	x			x				x	x		1
24	(Yung & Paas, 2015)		x		x	x			x			10	63	(Andrade 2012)		x		x				x			9
25	(Zeljčić, 2015)				x	x	x					3	64	(Barrón, et al., 2012)	x			x	x				x		7
26	(Arroyo et al., 2014)	x			x	x			x			46	65	(Y. Chen, 2012)		x	x	x							0
27	(Caro et al., 2014)	x			x							0	66	(Cheon, et al., 2012)		x		x				x			22
28	(Choi, et al., 2014)		x		x							63	67	(Dung, et al., 2012)	x			x					x		16
29	(Conde-ram, et al., 2014)		x						x		x	0	68	(Fazel, et al., 2012)	x			x					x	x	19
30	(Faghihi et al., 2014)				x	x			x			7	69	(Kalyuga, et al., 2012)		x		x							51
31	(Feldman, et al., 2014)	x			x					x	x	22	70	(Latham, et al., 2012)	x			x					x	x	88
32	(González, et al., 2014)	x			x				x			15	71	(Leppink, et al., 2012)		x		x	x	x					37
33	(Jegatha, et al., 2014)			x	x					x	x	26	72	(Mislevy, et al., 2012)			x	x						x	67
34	(Jupri, et al., 2014)			x	x							6	73	(Paas, et al., 2012)		x		x				x			161
35	(Kar, Das, y Ghosh, 2014)								x	x		104	74	(Paquette, 2012)	x	x		x			x	x			14
36	(Khachatryan et al., 2014)	x			x	x					x	12	75	(Thomas, et al., 2012)	x		x	x				x	x		21
37	(Kramarski, et al., 2014)				x	x	x		x			1	76	(Zouhair et al., 2012)	x		x	x					x		5
38	(Lin & Lin, 2014)				x	x	x					13	77	(Alsabait, et al., 2011)	x			x					x	x	4
39	(Long, et al., 2014)	x			x	x	x					22	78	(Roll, et al., 2014)	x		x	x		x	x				95

2.3 Conclusiones del Estado del Arte

Se ha realizado un análisis de los temas conceptuales relacionados con el diseño y desarrollo de sistemas tutoriales inteligentes, mas específicamente vinculados al aprendizaje del álgebra. Se han clasificado los temas dependiendo del módulo del sistema tutor inteligente en el cual estarían ubicados. Se han distinguido diez temas en total y se ha realizado un análisis del estado del arte actual para cada uno de ellos. Se ha podido observar que la tendencia en el desarrollo de sistemas tutoriales inteligentes se ha orientado más al campo de ciencia y tecnología como matemáticas y programación.

Es evidente que el hecho de realizar un sistema tutorial inteligente requiere en el diseñador y desarrollador, una formación interdisciplinar, tanto en el campo de conocimiento que será objeto del entrenamiento, como de métodos y técnicas de inteligencia artificial y ciencias computacionales por lo que representan un gran reto y trabajo.



Gráfica 1. Clasificación de los artículos en base al total de temas que incluyen.

Tabla 5. Temas que incluyen los 2 artículos que abarcan 6 de los 10 temas considerados en el análisis del estado del arte.

ARTÍCULO 1	TEMAS	ARTÍCULO 2	TEMAS
On the Benefits of Seeking (and Avoiding) Help in Online Problem-Solving Environments(Roll et al., 2014)	STI	Intelligent Tutoring Systems	STI
	Valoración y/o evaluación	Measuring Student's Effort	Valoración y/o evaluación
	Diseño Instruccional	During Assessment (Lach, 2013)	TCC
	Enseñanza de matemáticas		Diseño instruccional
	Resolución de problemas		Modelo del estudiante
	Retroalimentación		Modelos inteligentes

2.4 Limitantes de la literatura

En base al análisis realizado, se pudo observar que existen diversas investigaciones relacionadas con el desarrollo de sistemas tutores cognitivos. Sin embargo, a través del análisis también se pudo detectar que existen oportunidades para el desarrollo de investigaciones relacionadas con herramientas cognitivas, tomando como sustento la teoría de la carga cognitiva. A través del análisis se puede constatar que, en el desarrollo de un sistema tutorial cognitivo, se requiere la inclusión y relación de diversas teorías, sin embargo, debe realizarse con cuidado y con un buen sustento teórico, ya que puede conducir a generar herramientas que pueden ser difíciles de implementar y probar.

Tabla 6. Temas de artículos de la Tabla 4 con el más alto factor de impacto

Referencia	Tema principal	Total citas	de
(Seaborn y Fels, 2014)	Gamificación	327	
(Hanus y Fox, 2015)	Valoración con gamificación	242	
(Kulkarni, Papadopoulos, Cheng, Koller, y Klemmer, 2013)	Valoración	195	
(Paas & Sweller, 2012)	Teoría de la Carga Cognitiva con sistemas de aprendizaje	161	
(Kar et al., 2014)	Sistemas Neuro - Difusos	104	

2.4.1 Limitantes de la literatura

En base al análisis realizado, se pudo observar que existen diversas investigaciones relacionadas con el desarrollo de sistemas tutores cognitivos. Sin embargo, a través del análisis también se pudo detectar que existen oportunidades para el desarrollo de investigaciones relacionadas con herramientas cognitivas, tomando como sustento la teoría de la carga cognitiva. A través del análisis se puede constatar que, en el desarrollo de un sistema tutorial cognitivo, se requiere la inclusión y relación de diversas teorías, sin embargo, debe realizarse con cuidado y con un buen sustento teórico, ya que puede conducir a generar herramientas que pueden ser difíciles de implementar y probar.

2.4.2 Relación de la propuesta de tesis con las limitantes encontradas en la literatura

Son muchas aún, las áreas de oportunidad relacionadas con el desarrollo de Sistemas Tutoriales Inteligentes (STI). Dentro del análisis mostrado en este capítulo, mencionamos 10 temas (que pueden ser teorías o conceptos) que están relacionados con el desarrollo de los STI, justificando mediante el diagrama mostrado en el Esquema 1 la relación y necesidad de cada uno de los temas y por lo descrito en la Gráfica 1 solo el 3% de los artículos analizados están relacionados con 6 temas (ninguno con 7, 8, 9 ó 10), es decir, solo 2 de los 78 artículos son investigaciones que incluyen 6 de los 10 temas (Tabla 5). No se puede afirmar que este hecho sea algo negativo para las investigaciones descritas en cada uno de los artículos analizados, ya que el objetivo de cada una puede no ser incluir diversos temas, y de alguna manera sustentan y fundamentan la investigación realizada, con los temas incluidos; sin embargo, sí podemos afirmar que para el objetivo de la investigación realizada en este proyecto de tesis, es un área de oportunidad que nos permite aportar resultados sustentados y fundamentados en más de 6 de los temas, permitiendo con esto dar la pauta para obtener resultados que pueden aportar a las diferentes áreas de investigación, relacionadas con las teorías y conceptos considerados.

De manera más puntual, y tratando de no ambicionar en lo que se pueda lograr, podemos concluir que la propuesta de este proyecto, puede aportar aunque sea un poco en generar un tutor cognitivo para la resolución de problemas de álgebra (STI, resolución de problemas y enseñanza del álgebra) semi-automatizado, basado en juegos (interfaces tangibles y gamificación), que ayudará a evaluar al estudiante mediante el manejo de juegos (evaluación y gamificación) y propondrá diversos tipos de problemas al estudiante, mediante el análisis de los avances en su desempeño (TCC, sistemas inteligentes –mapas cognitivos difusos, sistemas de inferencia difusa-), todo esto mediante la automatización del proceso de un diseño instruccional propuesto(diseño instruccional). Es decir, estamos hablando de considerar 8 temas, (STI, resolución de problemas, enseñanza del

álgebra, interacción humano computadora - interfaces tangibles y gamificación -, evaluación, TCC, sistemas difusos -mapas cognitivos difusos, sistemas de inferencia difusos- y diseño instruccional), los temas que por el momento no se están incluyendo son el de retroalimentación, el cual es un proceso que requiere de modelos inteligentes un poco más complejos y el modelo del estudiante en la parte de los estilos de aprendizaje, el cual inicialmente se tenía contemplado, pero no es difícil de incluir, ya que mediante la herramienta propuesta se puede agregar una serie de procesos para identificar los estilos de aprendizaje mediante unos cuestionarios sencillos.

Cabe mencionar que la parte del modelo para proponer los tipos de problemas que el tutor le debe ir proporcionando al alumno, puede quedar un poco restringida, debido a la característica semi-automatizada de la herramienta, sin embargo, es una parte en la que se pretende seguir trabajando a futuro, pero por el momento, el modelo propuesto puede ser probado mediante la simulación del software implementado, por lo que la validación quedaría como trabajo futuro.

■ **CAPÍTULO 3. MARCO TEÓRICO**

CONCEPTUAL

Algunas de las teorías bases de este proyecto de investigación se relacionan con más de un concepto clave (ver Esquema 1, del Capítulo 2). Si se considera que, de manera general, lo que se pretende dentro del proyecto es determinar que tanto se puede manipular la habilidad cognitiva de los alumnos, en la resolución de problemas de álgebra, entonces debemos partir de bases o teorías relacionadas con la *Habilidad Cognitiva*. La cual se relaciona con cuatro teorías: en principio se considera la *Teoría Cognitiva*, ya que cuando hablamos de habilidad cognitiva, de manera implícita se está considerando el proceso de cómo lograr que el alumno adquiera elementos que lo ayuden a estructurar la información de algún tema en cuestión para lograr el aprendizaje, y es precisamente, la teoría cognitiva la que proporciona los sustentos teóricos que ayudan a fundamentar el aprendizaje, mediante el manejo de esquemas cognitivos complejos que ayudan a almacenar el conocimiento adquirido. Por lo tanto, también es necesario relacionar la habilidad cognitiva con las *Teorías del Aprendizaje*, y más específicamente, con la del alineamiento constructivo, la cual menciona que un buen sistema de enseñanza, alinea el método y la evaluación de la enseñanza con las actividades de aprendizaje establecidas en los objetivos. Por lo tanto, el hecho de querer “manipular” la habilidad cognitiva, nos lleva a considerar modelos que puedan ayudarnos a medir o evaluar la habilidad cognitiva y es aquí donde se considera la *Teoría de la Lógica Difusa*, la cual nos proporciona modelos que pueden ayudarnos a dicho fin, de una manera no tan subjetiva o rígida. Por último, se considera que se relaciona con la Teoría de la Carga Cognitiva, debido a que para lograr el aprendizaje, es muy importante determinar la habilidad cognitiva de un estudiante en el tema en cuestión, porque si se le proporciona material que ya conoce se sobrecarga la memoria de trabajo y se inhibe el aprendizaje y por el contrario si se le proporciona material nuevo y no conoce los temas previos, el

estudiante no podrá relacionar lo nuevo con lo anterior y evitará que se almacene el nuevo conocimiento. Esto también tiene que ver con lo que menciona la teoría cognitiva de la forma de almacenar el aprendizaje mediante esquemas, de tal manera que, la nueva información debe estar relacionada con algún esquema existente en la memoria del estudiante para que pueda ser almacenado.

Otro de los conceptos considerados en el proyecto, es la *Resolución de Problemas*, el cual es un tema muy importante o medular en el proyecto de investigación, debido a que existen diversas investigaciones que afirman que el aprendizaje de las matemáticas debe ir de la mano de la resolución de problemas, y a su vez, se considera que la resolución de problemas es un proceso cognitivo de orden superior, de ahí la relación entre la habilidad cognitiva y la resolución de problemas. El tema de la resolución de problemas es el que da origen a considerar la *Teoría de la Carga Cognitiva* como base del proyecto de tesis, ya que en dicha teoría fundamentan una técnica denominada efecto “worked examples” relacionada con la resolución de problemas; y es precisamente lo que se está considerando como parte del *Diseño Instruccional*, el cual es otro concepto clave de la tesis y de ahí su relación con la *Teoría de la Carga Cognitiva*. A su vez, la relación de la *Resolución de Problemas* con la *Teoría de los Sistemas Tutoriales* se visualiza en el hecho de que el aprendizaje y la adquisición de habilidades cognitivas se puede lograr por la resolución de problemas mediante la orientación, a través de sistemas tutoriales inteligentes, los cuales también son el medio para automatizar el *Diseño Instruccional*.

Finalmente, el hecho de incluir *Tecnología* para el logro de los objetivos del proyecto, nos lleva a considerar y relacionar este concepto con dos de las teorías ya mencionadas anteriormente, la de los *Sistemas Tutoriales*, la de la *lógica difusa* y una tercera denominada *Teoría de la Gamificación*, la cual nos permite hacer que el diseño instruccional incluya elementos que se consideran en ambientes de juegos o competencias, pero sin llegar a ser un juego, esto es, el manejo de retos, premios, insignias, que motiven e induzcan al estudiante a alcanzar niveles de aprendizaje más altos.

El contenido del presente documento profundiza en las definiciones de los conceptos claves (sección 3.1) y la descripción de las teorías (sección 3.2) antes mencionadas, en base a la revisión de la literatura, y en cada sección se agregan las disertaciones tanto de los conceptos como de cada una de las teorías.

3.1 Conceptos claves

3.1.1 Habilidad Cognitiva

La capacidad de un individuo para realizar las diversas actividades mentales más estrechamente asociadas con el aprendizaje y la resolución de problemas es lo que se conoce como habilidad cognitiva. Los ejemplos incluyen habilidad verbal, espacial, psicomotora, y velocidad de procesamiento¹. Se considera a la habilidad cognitiva como operaciones del pensamiento mediante las cuales el sujeto puede apropiarse de los contenidos y del proceso que usó para ello. Son un conjunto de operaciones mentales cuyo objetivo es que el aprendiz integre la información adquirida, básicamente a través de los sentidos, en una estructura de conocimientos que tenga sentido para él. Asimismo, Rigney (1978) citado en Mendoza Juárez y Mamani Gamarra (2012) menciona que las habilidades cognitivas son entendidas como operaciones y procedimientos para adquirir, retener y recuperar diferentes tipos de conocimientos y ejecución, suponen capacidades de representación (lectura, imágenes, habla, escritura y dibujo), capacidades de selección (atención e intención) y capacidades de autodirección, auto programación y autocontrol.

La habilidad cognitiva está estrechamente relacionada con la adquisición de aprendizaje, por lo que O'Neil y Spielberger (1979) citados en Perez Torres (2010), prefieren utilizar el término estrategias de aprendizaje en lugar de habilidades cognitivas, pues en él incluyen las estrategias de tipo afectivo y motor,

1. National Council on Measurement in Education http://www.ncme.org/ncme/NCME/Resource_Center/Glossary/NCME/Resource_Center/Glossary1.aspx?hkey=4bb87415-44dc-4088-9ed9-e8515326a061#anchorC

así como las estrategias propiamente cognitivas; aunque de hecho reconocen tres características básicas de este dominio: la gran diversidad terminológica, el limitado acuerdo existente respecto a sus conceptos fundamentales y el estado de “arte” en que se encuentra. Sin embargo, ello no impide que puedan establecerse algunas distinciones; por ejemplo, respecto a un tema muy próximo conceptualmente, tal como el de los estilos cognitivos. Perkins (1985), comentando el problema de la generalidad o especificidad de las habilidades cognitivas, señala una posible distinción entre estilos cognitivos y estrategias; los primeros están más íntimamente ligados a la conducta general de la persona, a su modo de pensar, de percibir, etc. (dependencia/independencia de campo; reflexividad/impulsividad, etc.), mientras las segundas son conductas más específicas aplicadas en un momento determinado de un proceso (como, repasar un texto que se acaba de leer).

La actuación estratégica se refiere a la selección, organización y disposición de las habilidades que caracterizan el sistema cognitivo del individuo. Por ejemplo, Weinstein y Mayer (1983) las estructuran en tres apartados: 1) Estrategias de repetición, ensayo o recitación, cuyo objetivo es influir en la atención y en el proceso de codificación en la memoria de trabajo (a corto plazo), facilitando un nivel de comprensión superficial. 2) Estrategias de elaboración, que pretenden una comprensión más profunda de los contenidos de los aprendizajes, posibilitando la conexión entre la nueva información y la previa, ayudando a su almacenamiento en la memoria a largo plazo, para conseguir aprendizajes significativos. 3) Estrategias de organización, que permiten seleccionar la información adecuada y la construcción de conexiones entre los elementos de la información que va a ser aprendida, lo que fomenta el análisis, la síntesis, la inferencia y la anticipación ante las nuevas informaciones por adquirir.

3.1.2 Disertación sobre la habilidad cognitiva

Aunque existen diferentes definiciones de lo que es la habilidad cognitiva, los autores coinciden en que son procesos o tareas mentales que conducen a la

adquisición de nuevo conocimiento, el cual, si es organizado adecuadamente, mediante ciertas estructuras mentales, puede conducir al aprendizaje. La organización de dichas estructuras debe ser conducida de manera sistemática y organizada, lo que da lugar al surgimiento de técnicas o métodos, sustentados en diversas teorías, que ayudan a proponer estrategias relacionadas con la habilidad cognitiva.

Clasificación de la habilidad cognitiva

Aunado al proceso de organizar las estructuras mentales que conducirán al aprendizaje, Pérez Torres (2010) hacen una clasificación de las habilidades cognitivas, partiendo de la afirmación de que las habilidades cognitivas son las facilitadoras del conocimiento, aquellas que operan directamente sobre la información: recogiendo, analizando, comprendiendo, procesando y guardando información en la memoria, para, posteriormente, poder recuperarla y utilizarla dónde, cuándo y cómo convenga. En general, son las siguientes (Perez Torres, 2010):

1. Atención: Exploración, fragmentación, selección y contra distractoras.
2. Comprensión (técnicas o habilidades de trabajo intelectual): Captación de ideas, subrayado, traducción a lenguaje propio y resumen, gráficos, redes, esquemas y mapas conceptuales. A través del manejo del lenguaje oral y escrito (velocidad, exactitud, comprensión).
3. Elaboración: Preguntas, metáforas, analogías, organizadores, apuntes y mnemotecnias.
4. Memorización/Recuperación (técnicas o habilidades de estudio): Codificación y generación de respuestas. Como ejemplo clásico y básico, el método 3R: Leer, recitar y revisar (read, recite, review).

Complementando la clasificación anterior, Hartman y Sternberg (1992) mencionan que las habilidades cognitivas son los "trabajadores" intelectuales, que realizan las acciones cognitivas formuladas por la meta-cognición. Dos de los tipos

principales de trabajos son adquisición y procesamiento de información. Numerosas y variadas habilidades cognitivas se utilizan en todas las áreas de contenido. Su operación específica se ve afectada por muchos factores, incluyendo el tema, la tarea, las actitudes y las variables contextuales. En la definición de Hartman y Sternberg (1992) se incluye el término meta cognición, el cual es también de suma importancia tanto para el sustento del diseño instruccional que se propone en este trabajo, como para sustentar el uso de tecnologías, por lo que en el siguiente apartado se profundiza más en este concepto.

El conocimiento meta-cognitivo como el conocimiento de los factores que afectan las actividades cognitivas (Flavell, 1979) se refiere a tres grandes categorías: la persona, la tarea y las estrategias. En la definición clásica de Flavell, la categoría de "tarea" incluye información sobre una tarea propuesta que está disponible para una persona, incluyendo el conocimiento sobre los recursos tangibles necesarios para completar la tarea. Como tal, el conocimiento sobre los recursos de información pertenece a esta categoría. El conocimiento y las habilidades metacognitivas tienen funciones de nivel ejecutivo que permiten la conciencia y el control sobre el pensamiento propio. Antes, durante y después del desempeño de las tareas, controlan el comportamiento inteligente, por ejemplo, dirigiendo habilidades cognitivas de nivel inferior para inferir una relación y aplicarla a una analogía (Hartman y Sternberg, 1992).

Después de definir de manera general el conocimiento meta-cognitivo, es importante también considerar la definición de habilidades meta-cognitivas, las cuales son las facilitadoras de la cantidad y calidad de conocimiento que se tiene (productos), su control, su dirección y su aplicación a la resolución de problemas, tareas, etc. (procesos). Por lo tanto, las habilidades meta-cognitivas se pueden dividir en (Zou Yanqun¹, 2015):

1. Conocimiento del conocimiento: de la persona, de la tarea y de la estrategia.

2. Control de los procesos cognitivos, los cuales son:

- a). Planificación: Diseño de los pasos a dar.
- b). Autorregulación: Seguir cada paso planificado.
- c). Evaluación: Valorar cada paso individualmente y en conjunto.
- d). Reorganización (feedback): Modificar pasos erróneos hasta lograr los objetivos.
- e). Anticipación (forward): Avanzar o adelantarse a nuevos aprendizajes.

En general, las habilidades meta-cognitivas supondrían aprender a reflexionar, estando integradas por variables de la persona, la tarea y las estrategias. Las variables de la persona estarían formadas por nuestros conocimientos y creencias acerca de cómo somos y cómo son los demás, como procesadores cognitivos, estando directamente relacionadas con los componentes cognitivos de la motivación (percepción de autoeficacia, creencias de control, expectativas de rendimiento, etc.). Las variables de la tarea incluyen la consciencia acerca de sus demandas: magnitud, grado de dificultad, estructura, si es conocida o no, esfuerzo que requiere, etc.; adquiriéndose también de forma progresiva la comprensión de su influencia. El conocimiento de las variables de estrategia se refiere al conocimiento procedimental, extraído de la experiencia, resultante de la ejecución de tareas anteriores. A partir del conocimiento de las características y requisitos de las tareas, las características personales y las estrategias que hay que emplear, es cuando se puede empezar a planificar, regular, evaluar y reorganizar el proceso cognitivo coherentemente (Zou Yanqun¹, 2015; Perez Torres, 2010).

3.1.3 La habilidad cognitiva en la resolución de problemas y el diseño instruccional

McCormick et al. (1989), citado en Perez Torres (2010) abordan la cuestión de las habilidades cognitivas en el marco del aprendizaje en una línea actual de

transición de los contextos de laboratorio a las situaciones académicas de la vida real. En este ámbito han tenido lugar dos avances importantes:

1º. El desarrollo de modelos complejos de pensamiento calificable como competente; lo cual ha permitido identificar con mayor precisión las habilidades y estrategias más importantes.

2º. La elaboración de diseños de instrucción que promueven una actuación competente, evaluando el valor y efectividad de la instrucción en contextos naturales.

En relación al primer apartado los autores señalan tres modelos representativos del enfoque de procesamiento de la información: el modelo de resolución de problemas de Baron, el modelo de componentes de Sternberg y el del buen utilizador de estrategias de Pressley.

Por otra parte, en Roll, Alevén, McLaren, y Koedinger (2007) mencionan que uno de los tres principales principios de diseño de instrucción que proponen en "How People Learn" (Bransford et al., 2000) es apoyar la meta-cognición. Tener mejores habilidades meta-cognitivas puede ayudar a los estudiantes a aprender mejor en un ambiente de aprendizaje (como un sistema de tutoría o un aula tradicional) y, además, puede ayudarle a auto-regular su aprendizaje a través de diversos dominios y contextos. De hecho, la investigación demuestra que una instrucción meta-cognitiva bien diseñada tiene un impacto positivo en el comportamiento meta-cognitivo y posteriormente en el aprendizaje del dominio, por ejemplo, la instrucción sobre el uso de habilidades de depuración.

Como parte final de este apartado, es importante mencionar que Tzohar-Rozen y Kramarski (2014) afirman que los estudiantes experimentan dificultades cognitivas y meta-cognitivas en la resolución de problemas de matemáticas y desarrollan emociones negativas y la falta de motivación, que frenan sus esfuerzos. La mayoría de los estudios de autorregulación sobre la resolución de problemas tienden a centrarse en la meta-cognición; y pocos han explorado el componente motivacional y emocional.

Como conclusión se puede decir que tanto, las habilidades cognitivas como la meta cognición están relacionadas con la implementación de diseños instruccionales adecuados y la resolución de problemas o, dicho de otra manera, un diseño instruccional enfocado a la resolución de problemas que conduzca al aprendizaje debe estar sustentado en estos conceptos.

3.1.4 Resolución de Problemas

La dificultad de definir el término problema está ligada con la relatividad del esfuerzo de un individuo cuando éste intenta resolver un problema. Es decir, mientras que para algunos estudiantes puede representar un gran esfuerzo intentar resolver un problema, para otros puede ser un simple ejercicio rutinario (Santos Trigo, 2014). Schoenfeld (1985) citado en Santos Trigo (2014) usa el término “problema” para referirse a una tarea que es difícil para el individuo que está tratando de hacerla.

Varios estudios han demostrado que la resolución de problemas es excepcionalmente demandante en términos de la capacidad de memoria de trabajo (Schnotz y Kürschner, 2007). De acuerdo a Bailey y Taylor (2015), una enseñanza ambiciosa en matemáticas se refiere al apoyo que se le debe proporcionar a todos los estudiantes para desarrollar una comprensión conceptual, fluidez en los procedimientos, competencia estratégica, y el razonamiento adaptativo para resolver problemas auténticos. La enseñanza, a través de la resolución de problemas se considera una práctica de enseñanza de alto nivel y en matemáticas comúnmente incorpora el uso de tareas que permiten una variedad de caminos matemáticos que pueden ser explorados. Eisenmann, Novotná, Přebyl, y Břehovský (2015) mencionan que la enseñanza eficaz de las matemáticas se logra cuando a los alumnos se les enseña a resolver problemas. Argumentan que la teoría de las situaciones didácticas en matemáticas afirma que, para cada problema, hay un conjunto de conocimientos que son pre-requisito para su solución exitosa. Sin embargo, no todos estos conocimientos de requisito previo están a disposición del alumno en la resolución de problemas matemáticos.

En otras palabras, el aprendizaje de las matemáticas amplía el repertorio de estrategias de los estudiantes, así como el conocimiento disponible para el alumno. Así mismo proponen, que, en cierta medida, los alumnos puedan aprender a utilizar algunas estrategias heurísticas en la resolución de problemas y así resolver los problemas de manera eficiente.

Heurísticas

Son estrategias que pueden ayudar a avanzar o resolver un problema. Por ejemplo, pensar en un problema en una forma más simple, buscar algún patrón, usar diagramas o gráficas y usar tablas (Santos Trigo, 2014). Es fácil aceptar la importancia y el potencial de las estrategias heurísticas al resolver problemas matemáticos; sin embargo, ¿Cómo deben ser enseñadas éstas a los estudiantes? Parece que no es suficiente que el alumno conozca las diversas estrategias, sino que es importante que participe en experiencias relacionadas con el cuándo y cómo utilizarlas.

Estrategias meta cognitivas

El término meta-cognitiva se relaciona con algunas actividades tales como la planificación de cómo se aborda una tarea de aprendizaje, después, la comprensión y la evaluación del proceso (Sağirli, 2016).

La evaluación o monitoreo del progreso durante la resolución de problemas y el estar consciente de las propias capacidades y limitaciones también son aspectos importantes en la resolución de problemas, al monitoreo o autoevaluación del proceso se le identifica con las estrategias meta-cognitivas (Santos Trigo, 2014). Shoenfeld (1987) citado en Santos Trigo (2014) identifica tres categorías donde se presenta la meta cognición:

1. El conocimiento acerca de nuestro propio proceso, la descripción de nuestro propio proceso de pensar.

2. El control y la autorregulación. Que tan bien es capaz uno de seguir lo que se hace cuando se resuelve algún problema y que tan bien se ajusta uno al proceso.
3. Creencias e intuiciones. Las ideas acerca de las matemáticas que se muestran en el trabajo matemático y la forma como éstas se relacionan o identifican con la forma de resolver problemas.

Sistemas de Creencias

Las creencias matemáticas son los juicios de valor de los individuos que dan forma a sus experiencias matemáticas anteriores. Por otra parte, también se puede definir como las hipótesis de los estudiantes, relacionadas con la naturaleza de las matemáticas, las formas de aprendizaje, sus conceptualizaciones y su comprensión y sentimientos que afectan a sus estilos de comportamientos matemáticos (Sağirli, 2016). Las creencias establecen el contexto dentro del cual funcionan los recursos, las estrategias heurísticas y el control (Santos Trigo, 2014). Las creencias mostradas por los estudiantes acerca de las matemáticas provienen del tipo de instrucción que reciben en el salón de clases. Así, por ejemplo, el tipo de problemas usados en la clase, la forma de evaluación, las dinámicas de grupo y las tareas contribuyen directamente a que el estudiante desarrolle este tipo de creencias (Schoenfeld, 1992) .

Para Jurdak (2016) la actividad de la enseñanza de las matemáticas en la escuela es el proceso por el cual el maestro está motivado para enseñar competencias y conceptos matemáticos por medio de acciones que estén subordinadas conscientemente a la meta matemática prevista, utilizando las operaciones que están mediadas y limitadas por los artefactos (físicos y simbólicos) que son accesibles en las condiciones objetivas del contexto sociocultural de la escuela en cuestión. El autor propone un esquema de enseñanza de múltiple perspectiva y debido a que este esquema se basa en premisas el autor hace énfasis en 5 de ellas. Las tres primeras premisas se adaptan al esquema de aprendizaje, mientras que la cuarta y quinta se re

contextualizan para adaptarse a la naturaleza específica de la enseñanza. A continuación, se menciona cada una:

Premisa 1: La solución de problemas en la matemática escolar y resolución de problemas en el mundo real son dos sistemas de actividad distintos pero que interactúan.

Premisa 2: La diferencia sociocultural entre los dos sistemas de actividad de resolución de problemas en las matemáticas escolares y la resolución de problemas en el mundo real crea una frontera invisible entre ellos y por lo tanto conduce a la discontinuidad en la acción o interacción ya que los estudiantes se mueven entre estos dos mundos.

Premisa 3: Los dos sistemas de actividad, la resolución de problemas en el mundo real y la resolución de problemas en la matemática escolar se puede interconectar para formar un nuevo sistema de actividad interconectado cuyo objeto compartido es aprender a resolver problemas del mundo en las matemáticas escolares.

Premisa 4: Para establecer o restablecer la continuidad en la acción o interacción, ya que los estudiantes se mueven entre la escuela y el mundo real, los maestros de la escuela tienen que hacer un esfuerzo para que los estudiantes puedan cruzar la frontera entre estos dos mundos sociales.

Premisa 5: La enseñanza de los problemas del mundo real en la matemática escolar requiere la activación y uso de objetos de contorno (artefactos que median) y los mecanismos de aprendizaje que facilitan el aprendizaje de dicha resolución de problemas.

3.1.5 Disertación sobre la resolución de problemas

Es evidente que la resolución de problemas es una herramienta primordial y necesaria para el aprendizaje de las matemáticas, sin embargo, el aplicar un diseño instruccional que ayude en la enseñanza de las matemáticas, enfocado en

la resolución de problemas debe hacerse de manera que se sigan todas las propuestas fundamentadas tanto en las habilidades cognitivas como en la meta cognición, surgidas de diversas investigaciones y que han dado lugar a fundamentar teorías como la cognitiva y la de la carga cognitiva. Un aspecto muy importante que se ha mencionado en la conceptualización de los términos claves de este proyecto de investigación es el aspecto de la motivación, ya que no se debe perder de vista que en el proceso de la enseñanza – aprendizaje, se trabaja con personas con diferentes emociones, actitudes, estados de ánimo, etc. Por lo tanto, la inclusión de estrategias que ayuden a cuidar un poco estos aspectos, pueden ser la diferencia que de la pauta para lograr que los estudiantes puedan dominar las estrategias de la meta cognición, siendo el uso de las tecnologías como los tutores cognitivos emotivos o la gamificación, una alternativa de posible ayuda en este tema.

3.1.6 Diseño Instruccional

Smith y Ragan (1999) definen el diseño instruccional como el proceso sistemático y reflexivo de traducir los principios del aprendizaje y la enseñanza en los planes de los materiales de instrucción, actividades, recursos de información, y la evaluación. En Özata Yücel y Özkan (2015) mencionan que el diseño instruccional se refiere a los procesos de desarrollo de herramientas de enseñanza, materiales y actividades sobre la base de las teorías de aprendizaje, de acuerdo con los programas correspondientes, el aprendizaje y la enseñanza, y la evaluación de los alumnos.

Los diseños instruccionales son las explicaciones que se dan en contextos educativos y están diseñadas deliberadamente con el propósito de enseñar. En contraste con el concepto similar de ejemplos prácticos, las explicaciones de instrucción se centran más en principios abstractos en vez de soluciones a problemas concretos. Por ejemplo, una explicación de instrucción acerca de regresión polinómica podría señalar el hecho de que la regresión para el polinomio de primer grado es equivalente a una regresión lineal y que el polinomio de primer

grado describe una pendiente lineal. Tal explicación de instrucción aclara la relación entre la regresión lineal y la regresión para el polinomio de primer grado, abordando tanto representación verbal-simbólica y la representación visual icónica de la gráfica (Rey y Andreas, 2013).

A manera de ayudar a entender mejor el concepto de diseño instruccional Smith y Ragan (1999) definen por separado los dos términos.

Instrucción es la disposición deliberada de las condiciones de aprendizaje para promover el logro de algún objetivo definido. La instrucción es un arreglo de experiencias intencionales que conducen a los estudiantes a adquirir capacidades particulares. Estas capacidades pueden variar cualitativamente en forma, desde simples recordatorios del conocimiento a estrategias cognitivas que permiten a un estudiante encontrar nuevos problemas dentro de un campo de estudio.

Diseño. Este término implica una planeación intensiva o sistemática y un proceso de creación previo para el desarrollo de algo o la ejecución de algún plan con el objetivo de resolver un problema. Fundamentalmente, el diseño es una forma de resolver problemas y tiene mucho en común con la resolución de problemas en otras profesiones. El diseño se distingue de otras formas de planeación instruccional por el nivel de precisión, cuidado, y expertise que es empleado en la planeación, desarrollo y proceso de evaluación. Los diseñadores emplean un alto nivel de precisión, cuidado y experiencia en el desarrollo sistemático de instrucciones porque ellos perciben que una planeación pobre puede resultar en serias consecuencias.

Cuando se tiene la ausencia de un esquema, una herramienta instruccional puede proporcionar una guía para generar el esquema que falta en la memoria a largo plazo. Idealmente, la presentación de los materiales de instrucción guiaría el proceso de elaboración del conocimiento a través del cual las estructuras de conocimiento en la memoria a largo plazo se integrarán con la nueva estructura de conocimiento para formar el esquema correspondiente. De ahí que el objetivo de cualquier enseñanza de las matemáticas es ayudar a los alumnos a adquirir un

esquema y luego con la práctica adicional, automatizar el esquema adquirido. Con esto podemos decir que la definición de un diseño instruccional adecuado en la resolución de problemas es muy importante, justificando de esta manera la propuesta de un diseño instruccional para la resolución de problemas de álgebra, así como la importancia de la retroalimentación para fomentar la práctica adicional. Un diseñador instruccional podría considerar aquellos elementos que interactúan como carga cognitiva extraña si inhiben el aprendizaje; de lo contrario, constituirían carga cognitiva pertinente (Ngu et al., 2014).

3.1.7 Disertación sobre diseño instruccional

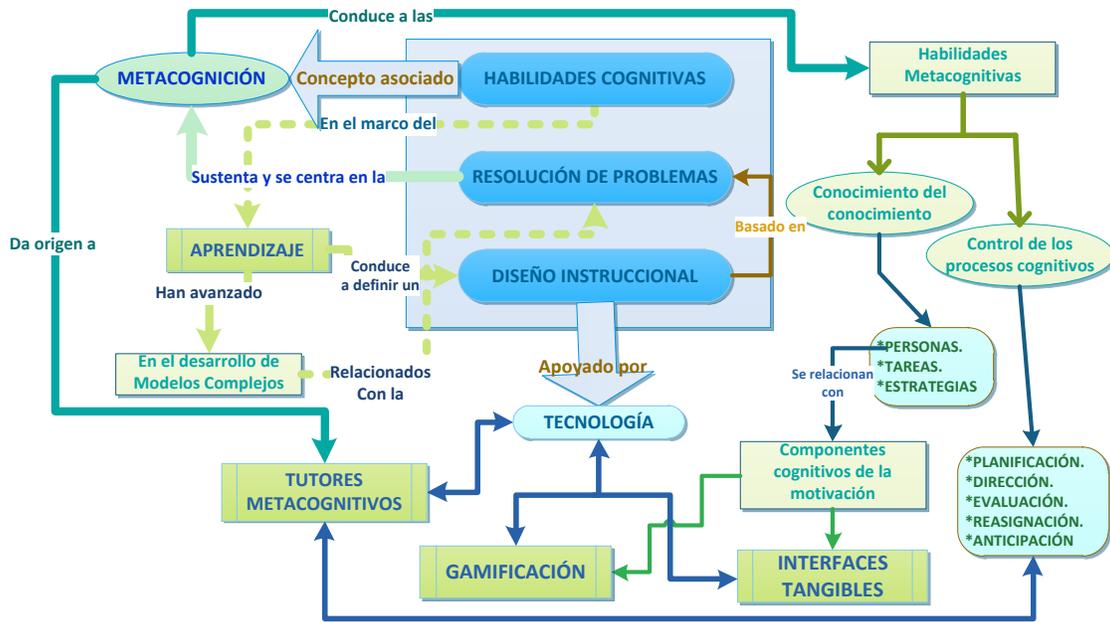
La enseñanza y comprensión del álgebra es muy importante para la comprensión de las matemáticas en general. Los autores mencionan que es muy importante un conocimiento procedimental y la comprensión conceptual, ambos relacionados con las bases del álgebra para lograr la interrelación entre los temas del álgebra y las otras áreas de las matemáticas. Es aquí donde se considera que el diseño instruccional relacionado con una metodología que ayude al alumno en la resolución de problemas puede ser una propuesta de solución para ayudar a que el estudiante adquiera tanto el conocimiento procedimental y la comprensión del álgebra y en consecuencia de otras áreas de las matemáticas. Dicho diseño instruccional puede ser automatizado y formar parte de los módulos Tutor y de Dominio del Tutor cognitivo. Incluso, debido a que el diseño instruccional que se está proponiendo en este proyecto, incluye la evaluación constante, el hecho de automatizar el diseño instruccional facilita las actividades de evaluación y reduce el trabajo exhaustivo que un docente debería realizar y razón por la cual no

3.1.8 Disertación sobre la relación entre los conceptos principales

Los conceptos principales del proyecto de investigación, además de formar parte de la pregunta de investigación, se pueden relacionar de tal manera que dan la

pauta para determinar las actividades a seguir para proponer estrategias de solución al problema planteado en la tesis. Un panorama general de dicha relación se muestra en el Esquema 2, en el cual se puede observar que la habilidad cognitiva, a través de la meta-cognición, da a lugar a generar estrategias que tengan que ver con el manejo de herramientas computacionales, ya que el proceso meta cognitivo no es fácil de controlar únicamente con estrategias manuales, debido a que las dos principales tareas de la meta-cognición; el conocimiento de la cognición y la regulación de la cognición, son procesos complejos para que un individuo los realice por sí solo, lo cual genera una relación entre las habilidades cognitivas y los recursos tecnológicos como los tutores inteligentes y la gamificación. De igual manera, dentro del contexto del aprendizaje, la habilidad cognitiva juega un papel importante, de hecho tienen una dependencia mutua, ya que el aprendizaje se logra a partir de la adquisición de conocimiento de una forma estructurada, conduciendo a mejorar la habilidad cognitiva y es precisamente la habilidad cognitiva la que genera los medios para que dicha adquisición tenga una estructura adecuada; sin embargo para lograr que estos proceso se lleven a cabo de manera ordenada, es necesario un diseño instruccional adecuado y sustentado en la teoría cognitiva. Y en forma similar, el aprendizaje ha sido el contexto para generar modelos basados en la resolución de problemas que ayuden a mejorar las habilidades cognitivas.

Así mismo, las estrategias que se manejan para lograr que un estudiante pueda controlar los procesos meta cognitivos, ayudan a que los estudiantes ejerciten la mente para tener un pensamiento abstracto apto para la comprensión de los procesos relacionados con la resolución de problemas.



Esquema 2. Las relaciones entre los conceptos principales, a través de subconceptos y teorías. Fuente: Diseño propio.

3.2 Descripción de las Teorías

3.2.1 Teoría Cognitiva

El cognitivismo, como una escuela filosófica y educativa, se centra en el estudio de las habilidades cognitivas y los procesos mentales del individuo. Evolucionando desde el cognitivismo, el constructivismo considera el conocimiento como algo que un individuo construye de sus experiencias. Piaget (biólogo y psicólogo Suizo) es un constructivista y cognitivista que cree que un individuo adquiere conocimiento al descubrir cosas por sí mismo; este argumento explica por qué las computadoras (principalmente Internet) son una herramienta importante en las escuelas. La Teoría de la educación de Piaget se basa en estructuras cognitivas que están, a su vez, basadas en la comprensión. Él cree que el medio ambiente puede crear las condiciones para el aprendizaje, pero no debería controlar o intervenir en el proceso de aprendizaje. El desarrollo viene de adentro de tal manera que un niño se desarrolla a un ritmo relacionado a un período determinado; un niño ordinario

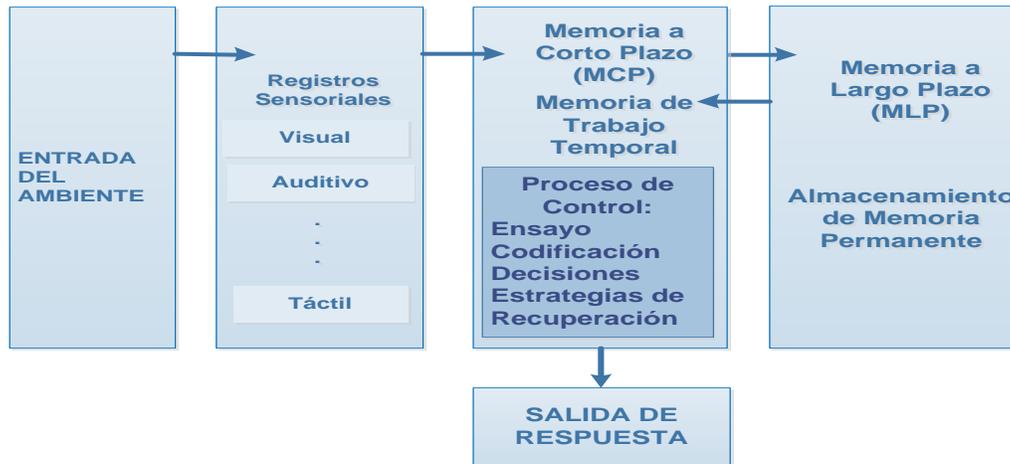
no puede aprender lo que uno podría esperar porque aún no ha alcanzado la etapa del desarrollo necesaria. Por lo tanto, el cognitivismo se centra en lo inobservable y lo que está sucediendo dentro de la cabeza del alumno. El entendimiento se obtiene sumando hechos al significado y por lo tanto, lucha por un enfoque de investigación donde los estudiantes participan activamente en el aprendizaje. Un individuo es un producto de características innatas, no sólo a los estímulos externos, y el papel de la escuela es desarrollar estas cualidades (Hassan, 2011).

Arquitecturas Cognitivas Humanas

Las arquitecturas cognitivas humanas proporcionan un esquema genérico de las etapas de procesamiento de la información que los estudiantes utilizan para codificar, almacenar y modificar información. Por ejemplo, el almacenamiento sensorial, memoria a corto plazo (MCP), y la memoria a largo plazo (MLP), son ejemplos de almacenes de memoria que se diferencian en el tipo, la duración y la cantidad de información que puede contener. Las arquitecturas cognitivas también especifican las estrategias que los estudiantes utilizan para transferir información dentro y fuera de estos almacenamientos (Background, 2012).

Los componentes estructurales del modelo de arquitectura cognitiva humana incluyen los tres almacenamientos que se muestran en el Esquema 3. Los procesos de control se refieren a las estrategias para la codificación y la recuperación de la información. Las estrategias de codificación en el modelo incluyen la repetición verbal (ensayo), la elaboración semántica (codificación), y las imágenes visuales. El registro sensorial sostiene sensaciones visuales, auditivas, y de otros tipos que dependen de la modalidad sensorial del estímulo de entrada. Estas sensaciones no duran mucho tiempo, por mencionar un ejemplo se puede decir que duran alrededor de 250 ms después de que un estímulo visual termina. Sin embargo, algunas de estas sensaciones pueden ser codificadas y almacenadas en la memoria de corto plazo que está limitada en duración y capacidad. La información se mantiene de 20 a 30 segundos cuando se desplaza

la atención a otra información. El aprendizaje, por lo tanto, requiere de la transferencia de información desde la memoria de corto plazo a la memoria de largo plazo más permanente. La memoria de largo plazo es ilimitada en la capacidad y mantiene información desde minutos hasta años (Background, 2012).



Esquema 3. Flujo de información a través de un sistema de memoria.
Fuente: Background, 2012.

Memoria de Trabajo Temporal

La memoria de trabajo puede compararse con la conciencia. Los seres humanos son conscientes y pueden monitorear sólo el contenido de la memoria de trabajo. Todos los demás funcionamientos cognitivos se ocultan a la vista hasta que se puedan poner en la memoria de trabajo. La memoria de trabajo es capaz de mantener sólo siete elementos de información a la vez. Además, debido a que la memoria de trabajo es más comúnmente utilizada para procesar información en el sentido de organizar, contrastar, comparar, o trabajar en dicha información de alguna manera, los seres humanos, probablemente sólo son capaces de hacer frente a dos o tres elementos de información de manera simultánea cuando se requiera procesar la información en lugar de simplemente mantenerla. Las interacciones que se llevan a cabo en la memoria de trabajo entre los elementos requieren de capacidad de memoria de trabajo, lo cual reduce reducción el número de elementos que pueden ser tratados de forma simultánea. Considerando que, inicialmente, la memoria de trabajo se visualizó como una

construcción unitaria, las teorías modernas de la memoria de trabajo dan lugar a un mayor énfasis en los procesadores parcialmente independientes. Estos procesadores son frecuentemente asociados con los modos sensoriales individuales. Por ejemplo, la teoría de Baddeley divide la memoria de trabajo en un "bloc de notas visual-espacial" para tratar la información con base visual y un "bucle fonológico" para hacer frente a la información auditiva, principalmente basado en el habla. Estos dos sistemas, a su vez, se rigen por un ejecutivo central que, probablemente, se asemeja más a la memoria de trabajo unitaria propuesta originalmente por las teorías de memoria trabajando. Bajo ciertas condiciones restringidas, la capacidad de memoria de trabajo puede ser aumentada por el uso de múltiples procesadores en lugar de un solo procesador de memoria de trabajo (Sweller, van Merriënboer, y Paas, 1998).

Memoria a Largo Plazo

La memoria a largo plazo contiene enormes cantidades de estructuras de conocimiento de dominio específico que pueden ser descritas como esquemas organizados jerárquicamente, que nos permiten categorizar las diferentes etapas de los problemas y decidir las soluciones más apropiadas. El uso controlado de esquemas requiere un esfuerzo consciente y, por lo tanto, los recursos de la memoria de trabajo. Sin embargo, después de haber practicado suficientemente, los esquemas pueden operar en forma automática en lugar de tener un procesamiento controlado. El procesamiento automático de esquemas requiere mínimos recursos de memoria de trabajo y permite proceder a la resolución de problemas con el mínimo esfuerzo (Kalyuga et al., 2003).

3.2.2 Disertación sobre la Teoría Cognitiva

Definitivamente, el sustento fundamental de este trabajo está relacionado con la Teoría Cognitiva, ya que como se pudo observar en el Esquema 2, uno de los elementos que dan origen a la relación entre los conceptos claves es la metacognición, el cual se deriva de las habilidades cognitivas y sirve para relacionarla

con la resolución de problemas y el diseño instruccional. De manera general y resumida, las habilidades cognitivas se centran en la adquisición y el procesamiento de la información para lograr el aprendizaje. Estos son dos procesos complejos que se llevan a cabo en la mente humana, mediante el almacenamiento de esquemas en la memoria a largo plazo. Por lo tanto, la dificultad de la tarea de crear los esquemas adecuados es lo que está sustentado por diversas investigaciones relacionadas con la teoría cognitiva. En la resolución de problemas para el aprendizaje de las matemáticas los esquemas pueden ser creados a partir de diversas estrategias, una de ellas puede ser la implementación de técnicas que ayuden a relacionar problemas reales con problemas matemáticos, ya que para que el alumno pueda crear un nuevo esquema debe existir una relación con el conocimiento ya almacenado en otros esquemas. Y como se mencionó anteriormente, otra estrategia puede ser el manejo de incentivos a través de estrategias de gamificación.

3.2.3 Teoría de la Carga Cognitiva (TCC)

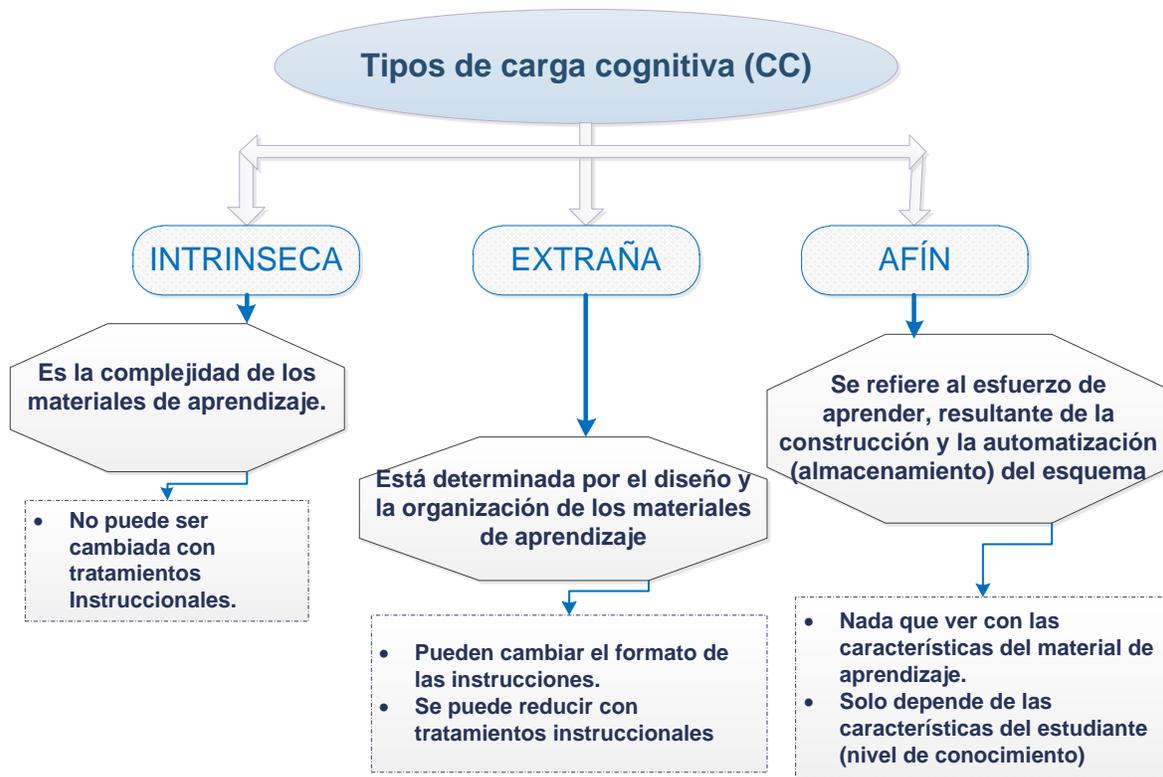
La teoría de la Carga Cognitiva (TCC) se ha convertido en una de las teorías más influyentes en el campo del diseño instruccional. La TCC se basa en la suposición de que la arquitectura cognitiva humana consiste tanto de la memoria a largo plazo y la memoria de trabajo. El almacén de la memoria a largo plazo es bastante grande, y toda la información que se almacena allí ha sido adquirida por un organismo con el fin de adaptarse cognitivamente a su entorno (Rey y Andreas, 2013).

Aunque el número de elementos que la memoria de trabajo puede procesar a la vez es limitado, el tamaño, la complejidad y sofisticación de los elementos no lo son. Un esquema puede ser cualquier cosa que se ha aprendido y se trata como una sola entidad. Si el proceso de aprendizaje se ha producido durante un largo período de tiempo, el esquema puede incorporar una gran cantidad de información. Esta enorme variedad de elementos se ha adquirido a lo largo de muchos años, pero puede ser almacenada en la memoria de trabajo, como una

sola entidad. Debido a la construcción del esquema, aunque hay límites en el número de elementos que puede ser procesado por la memoria de trabajo, no existen límites aparentes sobre la cantidad de información que puede ser procesada. Un esquema, que consta de un solo elemento en la memoria de trabajo no tiene límites en su complejidad informativa (Sweller et al., 1998).

Tipos de Carga Cognitiva (CC)

Se distinguen tres diferentes tipos de CC (Esquema 4) en la TCC (Sweller, 2010). La carga intrínseca, la carga ajena o extraña y la carga afín.



Esquema 4. Descripción de los tipos de Carga Cognitiva. Fuente: Diseño propio.

Carga Cognitiva Intrínseca.

Se determina por la naturaleza de los materiales de aprendizaje (por ejemplo, su complejidad), así como el nivel de experiencia del estudiante. La complejidad se refiere al número de elementos que tienen que ser procesados en la memoria de

trabajo simultáneamente con el fin de entender la interacción. Una premisa importante con respecto a la carga intrínseca es que no puede ser cambiada por tratamientos instruccionales (Jong, 2010). Para una tarea dada y el nivel de conocimiento del alumno, la carga intrínseca es fija y no puede ser alterada a menos que haya un cambio en la tarea básica o en los niveles de conocimiento del alumno. Es decir, La carga cognitiva intrínseca sólo puede ser alterada al cambiar la naturaleza de lo que se aprende o por el acto mismo de aprendizaje (Sweller, 2010).

Carga Cognitiva Extraña o Ajena

Está determinada por el diseño y la organización de los materiales de aprendizaje y se asocia con procesos que no son necesarios para el aprendizaje. Este tipo de carga es causada por el formato de las instrucciones y no por las características intrínsecas de las tareas de aprendizaje. La carga cognitiva extraña es la carga cognitiva que es evocada por el material de instrucción y que no contribuye directamente al aprendizaje (la construcción del esquema) y que puede ser alterada por las intervenciones de instrucción. Siguiendo esta definición, la carga extraña viene impuesta por el material, pero se podría haber cambiado con un diseño diferente. Una segunda fuente identificada de carga cognitiva extraña es cuando los estudiantes deben resolver problemas para los que no tienen ningún conocimiento basado en esquemas; en general, esto se refiere a problemas de la práctica convencionales. Una tercera fuente de carga extraña puede surgir cuando el diseño de la instrucción sólo utiliza uno de los subsistemas de la memoria de trabajo. Más capacidad se puede utilizar cuando se usan tanto las partes visuales y auditivas de la memoria de trabajo.

Carga Cognitiva Afín

Se refiere al esfuerzo de aprender resultante de la construcción y la automatización del esquema (ver Esquema 5 **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**). La carga afín sugiere que las actividades de aprendizaje que por naturaleza están relacionadas ayudan a lograr un aprendizaje significativo. Por

ejemplo, el intento de un alumno para explicar y justificar una solución a un problema de demostración de geometría contribuye a la carga afín. Desde una perspectiva pedagógica matemática, es importante que los profesores presenten actividades que fomenten la carga afín (Chinnappan, 2010). Para el aprendizaje, la carga afín debe ser estimulada para centrar la atención no sólo en el procesamiento de información y los principios, sino en su almacenamiento en la memoria a largo plazo (Kolschoten, French, y Brazier, 2014).

Hay una amplia gama de principios de diseño instruccional derivados de la TCC (por ejemplo, el principio de redundancia, el principio de la atención dividida y el principio de ejemplos prácticos), cuyo objetivo es reducir la CC extraña y / o aumentar la CC afín. Estos principios de diseño se han verificado en numerosos experimentos de laboratorio con diversos tipos de materiales de aprendizaje (Sweller, Ayres, y Kalyuga, 2011).

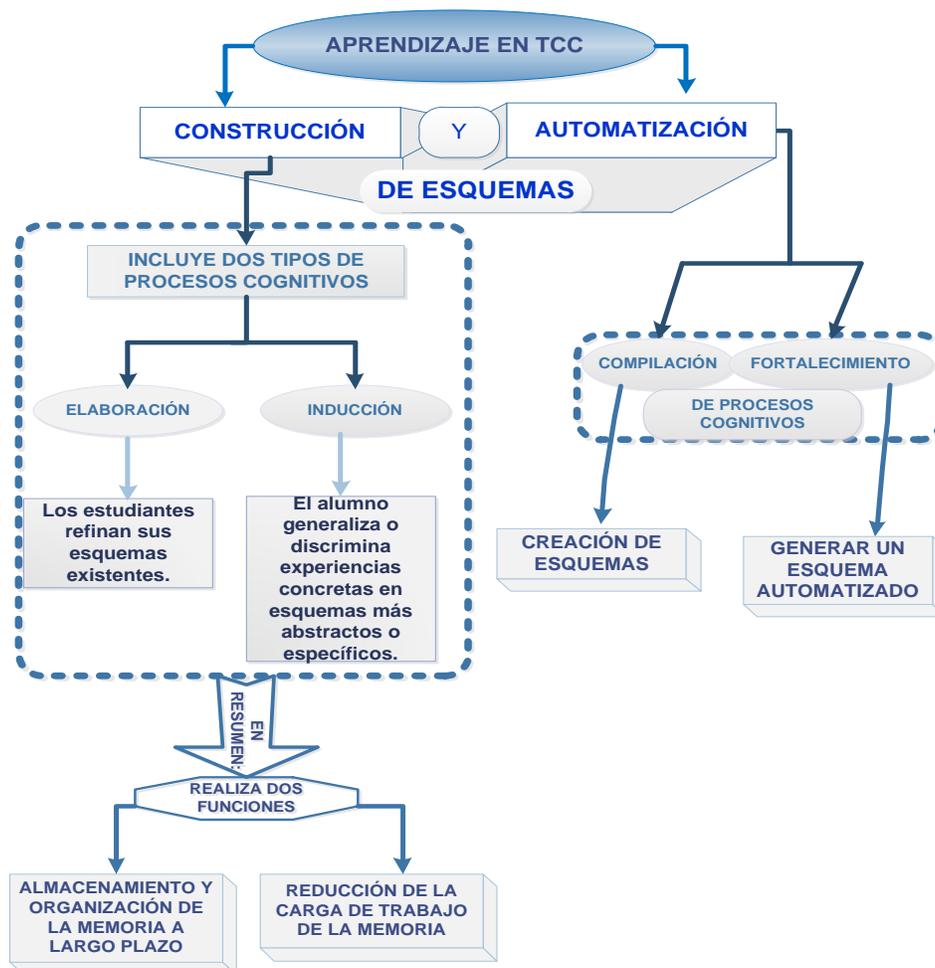
Aprendizaje en la TCC

La TCC concede especial importancia al aprendizaje, el cual se entiende como la construcción y la automatización de esquemas (ver Esquema 5). Si el conocimiento es la base de la habilidad intelectual humana, ¿qué forma tiene ese conocimiento? De acuerdo con la teoría del esquema, el conocimiento se almacena en la memoria a largo plazo en forma de esquemas. Un esquema es un constructo cognitivo que organiza los elementos de información con el fin de almacenarlos en la memoria a largo plazo. Los esquemas sirven para asignar los mecanismos para la organización del conocimiento y su almacenamiento y reducen la carga cognitiva, ya que un esquema es una entidad única en la memoria de trabajo, pero pueden contener una gran cantidad de información (Rey y Andreas, 2013).

Construcción de Esquemas

La construcción de esquemas incluye dos tipos de procesos cognitivos, a saber, elaboración del esquema y la inducción del esquema (ver Esquema 5). En la

elaboración del esquema, los estudiantes refinan sus esquemas existentes (que depende de la experiencia del alumno), mientras que la inducción del esquema se refiere a generalizar o discriminar experiencias concretas de aprendizaje en esquemas más abstractos o más específicos. Cuanto más sofisticado sea el esquema desarrollado, más alta es la experiencia del alumno. La automatización del esquema contiene la compilación y el fortalecimiento de procesos cognitivos. Mientras que la compilación del esquema se refiere a la creación de esquemas altamente específicos en los cuales las acciones son activadas automáticamente a las condiciones en estos esquemas, el fortalecimiento del esquema se refiere a la posibilidad de que se genere un esquema automatizado (Wouters, Tabbers, y Paas, 2007).



Esquema 5. El proceso de aprendizaje en la Teoría de la Carga Cognitiva (TCC). Fuente: Diseño propio

Así, los grandes maestros de ajedrez tienen esquemas que categorizan piezas dentro del tablero en patrones que les dicen que movimientos son los adecuados. Los esquemas pueden decirnos que ciertos objetos son árboles a los que podemos reaccionar de manera común a pesar de que no hay dos árboles que tienen elementos idénticos. En resumen, la construcción de esquemas tiene dos funciones: la de almacenamiento y organización de la información en la memoria a largo plazo y una reducción de la carga de trabajo de memoria. Se puede argumentar que estas dos funciones deben constituir el papel principal de los sistemas de educación y formación (Esquema 5).

Automatización de Esquemas

El procesamiento automático es en gran parte aprobado por la memoria de trabajo y tiene características muy diferentes al procesamiento consciente. La automaticidad se produce después de la práctica, normalmente de la práctica extensa. Con suficiente práctica, un procedimiento puede llevarse a cabo con el mínimo esfuerzo consciente (es decir, con la mínima carga de memoria de trabajo). En matemáticas, un esquema implica el conocimiento abstracto para una categoría de problemas junto con sus pasos de solución asociados. Un experto que posee un esquema automatizado es capaz de resolver problemas sin pasar por las limitaciones de la memoria de trabajo, debido a que las medidas de información y de soluciones pueden ser procesadas como una sola unidad, que puede ser fácilmente manejada cognitivamente. En la ausencia de un esquema, una herramienta de instrucción puede proporcionar una guía para generar el esquema faltante en la memoria a largo plazo. De ahí que el objetivo de cualquier enseñanza de las matemáticas es ayudar a los estudiantes a adquirir un esquema y luego con más práctica, automatizar el esquema adquirido (Ngu et al., 2014).

3.2.4 Efectos estudiados por la teoría de la Carga Cognitiva.

La teoría de la carga cognitiva ha sido utilizada para generar técnicas instruccionales con el trabajo llevado a cabo en varios centros de investigación de todo el mundo. Se deben considerar dos puntos relacionados a la utilización de la teoría del diseño instruccional. En primer lugar, no se intenta medir directamente y de forma independiente la carga cognitiva comparativa. Más bien, se utiliza la teoría para generar técnicas de instrucción que se han probado experimentalmente. Se han asumido pruebas exitosas para fortalecer la teoría que genera las técnicas. En segundo lugar, se han generado diversas técnicas que han sido apoyadas por varios experimentos, utilizando una variedad de materiales y una variedad de poblaciones (Sweller et al., 1998). Estas técnicas se conocen como efectos de la carga cognitiva, los cuales se describen a continuación.

Efecto “reversión de expertise”

El efecto de reversión experiencia ocurre cuando la experiencia de un alumno interactúa con los principios de diseño derivadas de la TCC. Proporcionar instrucciones para inducir la concentración en el procesamiento de los contenidos centrales de explicaciones instruccionales es una instrucción prometedora que significa apoyar a los estudiantes principiantes en el aprendizaje de las explicaciones de instrucción. Sin embargo, dentro de la investigación sobre el efecto de reversión de la experiencia (“expertise reversal”) se ha demostrado que los medios de instrucción que son beneficiosos para los principiantes puede ser perjudicial para los estudiantes con más experiencia si los medios de instrucción proporcionan orientación que se superpone con la orientación interna proporcionada por el conocimiento previo de los alumnos con más especialización. En tales circunstancias, los mensajes de inducir procesamiento enfocado, incluso podría ser perjudicial para los estudiantes con experiencia cuyo conocimiento previo ya ofrece orientación interna para aprender de explicaciones (Roelle y Berthold, 2013).

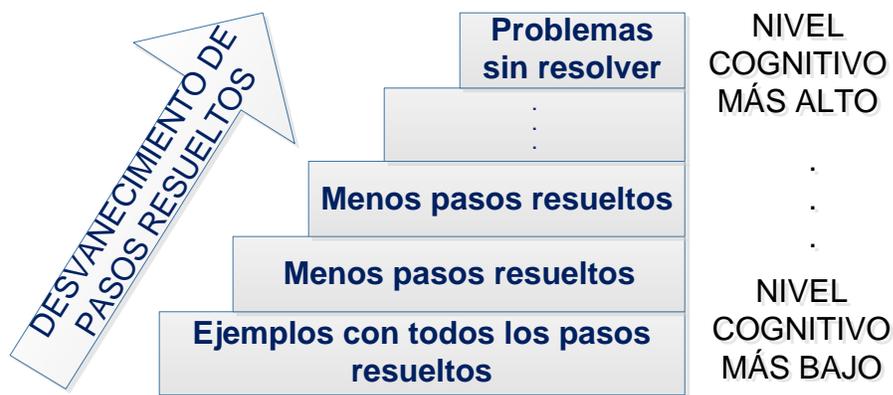
Por ejemplo, considere una presentación multimedia, que se define como una presentación tanto de palabras (habladas o escritas) y fotografías (por ejemplo, ilustraciones o animaciones). Al explicar el tema en forma escrita con una animación para complementar puede ser esencial para los principiantes, pero puede llegar a ser redundante a medida que aumenta experiencia. Por lo tanto, este material adicional (es decir, la explicación por escrito) conduce a la capacidad de aprendizaje reducida para los expertos en comparación con los expertos que no reciben este tipo de material (es decir, el efecto de redundancia de acuerdo a TCC). En contraste con los expertos, los principiantes deben lograr mayores niveles de rendimiento en el aprendizaje con este material adicional que es esencial debido a su nivel de experiencia. En general, la presentación de material adicional puede ser beneficiosa para los principiantes, pero perjudicial para los expertos en términos de resultados de aprendizaje, lo que resulta en el efecto de reversión de "expertise" para el efecto redundante.

Efecto “worked examples”

El papel de la orientación instruccional durante la enseñanza ha sido un problema importante y controvertido en la psicología instruccional. Por un lado, la guía instruccional directa que explica completamente los conceptos y procedimientos ayuda en el proceso de aprendizaje, en particular para obtener información novedosa. El efecto de ejemplos prácticos o resueltos basado en la teoría de la carga cognitiva presenta uno de los conjuntos de datos más fuertes que apoyan este enfoque. Los ejemplos resueltos proporcionan a los estudiantes una guía completa que contiene los principales pasos necesarios para resolver un problema. Muchos estudios han indicado que los ejemplos prácticos pueden resultar en un mejor aprendizaje de métodos de solución que practicar la resolución de problemas convencionales sin orientación (O. Chen et al., 2015).

Una implicación clave de reversión de “expertise” para el diseño instruccional es que los pasos resueltos deben ser gradualmente desvanecidos (Esquema 6) de ejemplos prácticos (la solución completa es presentada al

alumno) a los problemas (el alumno debe encontrar la solución). Lo ideal es que esta transición debe suceder cuando el alumno demuestra entendimiento (por ejemplo, mediante la vinculación adecuada de los pasos resueltos a los principios subyacentes de dominio). Esencialmente, la instrucción debe adaptarse al nivel de conocimientos del alumno al proporcionar inicialmente ejemplos prácticos cuando la capacidad de memoria de trabajo del alumno es limitada. Sólo cuando los alumnos adquieren comprensión de los principios de dominio y pueden aplicarlos en la solución de problemas, es momento de presentar a los alumnos las demandas de resolución de problemas reales (Salden, et al., 2010).



Esquema 6. Representación del efecto “worked examples”. Fuente: Diseño propio

Determinar el punto de transición es un reto de diseño instruccional interesante y una instancia de un “dilema de asistencia” más amplia, una elección fundamental que aparece en muchos contextos de instrucción (Koedinger & Alevan, 2007): ¿cuándo, en una secuencia instruccional, es más eficaz proporcionar asistencia (por ejemplo, modelos de soluciones)?, y ¿cuándo es más efectivo dejar al alumno que intente generar o construir soluciones por sí mismo, sin la ayuda del sistema (o con menores niveles de asistencia)?

3.2.5 Disertación de la Teoría de la Carga Cognitiva

Una forma de justificar el manejo de resolución de problemas en el aprendizaje es mediante el sustento que proporciona la Teoría de la Carga Cognitiva, ya que mediante dos de los efectos que maneja, el de “expertise reversal” y el de “worked examples” proporciona las bases para ayudar a construir diseños instruccionales basados en la resolución de problemas, que ayuden a minimizar la carga en la memoria de largo plazo. En este caso, la construcción y automatización de esquemas que reduzcan la carga cognitiva extraña, la cual es la que tiene que ver con los materiales de instrucción, se puede lograr mediante la implementación de estrategias que ayuden a identificar el conocimiento previo del alumno, lo cual no es una tarea fácil, ya que se requiere de estar aplicando constantemente, pruebas que verifiquen que tanto va aprendiendo el alumno del tema, sin embargo, con el apoyo de técnicas basadas en el uso de tecnología digital, esta puede ser una tarea más fácil de llevar a cabo. Por otra parte, la estrategia que propone la TCC de manejar problemas con ciertas características, también se puede implementar con el uso de herramientas digitales.

3.2.6 Teoría del Aprendizaje

Existen tres factores que influyen en el aprendizaje: El pensamiento reflexivo del estudiante, la interacción social con otros estudiantes en el salón de clases y el uso de modelos o herramientas para aprender. La clave para lograr que los estudiantes tengan pensamientos reflexivos es ocuparlos en problemas que los obliguen a usar sus propias ideas en la búsqueda de soluciones y crear nuevas ideas para el proceso. A su vez, para inducir a que los estudiantes interactúen en el salón de clases se debe diseñar un sistema que ayude a lograr dicha interacción. En el caso de modelos o herramientas, se refiere a manejar simbolismos, dibujos o herramientas computacionales (Van de Walle y Lovin, 2006).

Aprendizaje Significativo

La diferencia que existe entre el aprendizaje significativo y el aprendizaje repetitivo y memorístico; radica en que el aprendizaje significativo se produce cuando la nueva información cobra sentido o se relaciona con los conocimientos ya existentes en el alumno, (Ausubel, 1963; citado en Mendoza Juárez y Mamani Gamarra 2012); mientras que en el aprendizaje memorístico el alumno no tiene la intención de asociar el nuevo conocimiento con la estructura de conceptos que ya posee en su estructura cognitiva, es decir, el aprendizaje memorístico se produce por medio de asociaciones arbitrarias (Navarro, 1999; citado en Mendoza Juárez y Mamani Gamarra 2012).

Los conocimientos previos son concebidos en términos de esquema de conocimiento. Un esquema de conocimiento se define como la representación que posee una persona en un momento determinado en su historia, sobre una parcela de la realidad. Los esquemas que los alumnos poseen no sólo se caracterizan por la cantidad de conocimientos que contienen, sino también por su nivel de organización interna, es decir, por las relaciones que se establecen entre los conocimientos que se integran en un mismo esquema y por el grado de coherencia entre dichos conocimientos. Desde ésta concepción, lo que el estudiante construye a través del proceso de aprendizaje son significados, es decir, estructuras cognitivas organizadas y relacionadas; se construyen significados cuando la nueva información se relaciona sustancialmente con los conocimientos ya presentes en el sujeto. Cuanto más numerosas y complejas sean las relaciones establecidas entre el nuevo contenido de aprendizaje y los elementos de la estructura cognitiva, mayor será su significatividad y más profunda será su asimilación. Estas son observadas a través de los organizadores del conocimiento, que son un conjunto de estrategias y técnicas que ilustran, representan gráficamente a fin de evidenciar las estructuras cognoscitivas o de significado que tienen los individuos, en particular los alumnos (Bruner, 1978).

Alineamiento Constructivo

El sistema de enseñanza del Alineamiento Constructivo se basa en dos de los principios del constructivismo: aprendizaje y alineamiento en la enseñanza. Este sistema afirma que un buen sistema de enseñanza, alinea el método y la evaluación de la enseñanza con las actividades de aprendizaje establecidas en los objetivos, de manera que todos los aspectos de este sistema están de acuerdo en apoyar el adecuado aprendizaje del estudiante (Biggs, 2004). La adquisición de información, en sí no conlleva el aprendizaje, pero la forma de estructurar esa información y de pensar en ella si lo hace. El aspecto común más básico de las posturas constructivistas es que “el significado” no se impone ni se transmite mediante la enseñanza directa, si no que se crea mediante las actividades de aprendizaje del estudiante, es decir, sus enfoques del aprendizaje. Biggs define dos tipos de enfoques de aprendizaje: el superficial y el profundo. En el superficial los alumnos solo estudian para un propósito general (por ejemplo, aprobar un examen, contestar un cuestionario), por lo que esto genera bajo nivel cognitivo. En el enfoque profundo, los alumnos estudian para aprender y buscan el significado y la aplicación de lo que están aprendiendo.

Para lograr el alineamiento constructivo, Biggs propone manejar la Taxonomía SOLO (son las siglas de Structure of the Observed Learning Outcome, “Estructura del resultado observado del aprendizaje), la cual facilita una forma sistemática de describir como aumenta la complejidad de la actuación de un aprendiz cuando domina muchas tareas académicas. Puede utilizarse, por tanto, para definir objetivos curriculares, que describan donde deben estar operando los estudiantes y para evaluar los resultados del aprendizaje, de manera que podamos saber en qué nivel concreto se están desarrollando.

3.2.7 Valoración y/o Evaluación

La valoración es la evaluación del aprendizaje de los estudiantes a través de un método. El método de evaluación es una forma sistemática de la evaluación del aprendizaje de los estudiantes. En este contexto, el objetivo principal es elegir un

método que evalúe de manera efectiva el cumplimiento de los objetivos del curso, es decir, los resultados del estudio esperados (Hassan, 2011). Así mismo en Sharma y Chawla (2014) mencionan que el conocimiento no requiere sólo la adquisición de datos, procedimientos y conceptos, sino también tener una comprensión de las interrelaciones entre esos hechos, procedimientos y conceptos. Por lo tanto, es importante aprender acerca de los conocimientos actuales adquiridos por los alumnos, tanto en el período de aprendizaje y al final del mismo. Además, la capacidad del alumno para utilizar este conocimiento conceptual en la resolución de problemas prácticos también debe evaluarse para tener una idea clara acerca de la cantidad de comprensión de las interrelaciones entre los conceptos y las habilidades que efectivamente han sido adquiridas.

Roll, Baker, Alevan, y Koedinger, (2014) mencionan que una evaluación que apoya y estimula el aprendizaje es aquella en las que las habilidades de los estudiantes se analizan y evalúan para asegurar que los estudiantes desarrollen su aprendizaje y tengan confianza en sus habilidades. En este contexto, un entorno de aprendizaje eficaz se caracteriza por una alta flexibilidad, tanto en términos de enseñanza y evaluación. Las herramientas de evaluación deben, por lo tanto, estar diseñadas para basarse en hipótesis tácitas o explícitas sobre cómo aprenden los estudiantes.

En el artículo de Sharma y Chawla (2014) consideran los mapas conceptuales como una herramienta útil tanto para el aprendizaje como para la evaluación del mismo. Por lo tanto, dos componentes principales de un sistema de aprendizaje constructivista deben ser los componentes de enseñanza - aprendizaje y un componente para evaluar los resultados del aprendizaje.

En general, la enseñanza y el aprendizaje de nuevas habilidades deben seguir un patrón bien estructurado para dar cuenta de las capacidades cognitivas de los estudiantes. Un método de aprendizaje que se aplica a la teoría de Piaget bien puede estar relacionada con una evaluación taxonómica en la que se utilizan taxonomías para ayudar al maestro para leer el salto cualitativo en el aprendizaje de los estudiantes y el desarrollo cognitivo. Como un sistema de clasificación de

objetivos educativos, la taxonomía está diseñada para operar en un cierto contexto controlado; por ejemplo, el profesor puede integrar todo, desde la planificación hasta la evaluación de la enseñanza. La taxonomía, por lo tanto, contiene niveles que son uniformes, pero no exactamente las mismas etapas de desarrollo de Piaget. Estos niveles tienen en cuenta la complejidad estructural de las soluciones de los estudiantes para diversas tareas de evaluación (Hassan, 2011).

Retroalimentación

Marcar el trabajo del estudiante como correcto o incorrecto es una forma simple de retroalimentación que a menudo puede ser automatizada, pero la generación automática de retroalimentación formativa eficaz es un problema mucho más complejo. La revisión de la literatura sugiere que la retroalimentación formativa efectiva debe ser multidimensional y creíble, específica pero no evaluativa, y poco frecuente, pero a tiempo (Stamper, 2011). La retroalimentación está muy ligada con el manejo de sugerencias. La determinación del tiempo y la frecuencia de las sugerencias es un desafío particular, pero los estudios sugieren que ofrecer pistas sobre la demanda, en lugar de proactiva, puede tener efectos positivos en el aprendizaje.

3.2.8 Taxonomías

Taxonomía de Bloom

Con la publicación en 1956 de la taxonomía de objetivos educativos: La Clasificación de las Metas Educativas, nació un clásico de la educación para crear una clasificación de las habilidades cognitivas. El sistema de clasificación llegó a ser llamado Taxonomía de Bloom, después de que Benjamín Bloom, fue uno de los editores del volumen, y ha tenido significativa y duradera influencia en el proceso de enseñanza - aprendizaje en todos los niveles de educación hasta la actualidad. En el Esquema 7 se muestra la taxonomía de Bloom modificada, actualizada en 2001 (Skiba, 2013).

La Taxonomía de Bloom contiene seis categorías de habilidades cognitivas que van desde las habilidades de orden inferior que requieren menos procesamiento cognitivo a habilidades de orden superior que requerirán un aprendizaje más profundo y un mayor grado de procesamiento cognitivo (Adams, 2015).

Taxonomía SOLO

El sistema de enseñanza del Alineamiento Constructivo se basa en dos de los principios del constructivismo: aprendizaje y alineamiento en la enseñanza. Este sistema afirma que un buen sistema de enseñanza, alinea el método y la evaluación de la enseñanza con las actividades de aprendizaje establecidas en los objetivos, de manera que todos los aspectos de este sistema están de acuerdo en apoyar el adecuado aprendizaje del estudiante (Biggs, 1996). La adquisición de información, en sí no conlleva el aprendizaje, pero la forma de estructurar esa información y de pensar en ella si lo hace. El aspecto común más básico de las posturas constructivistas es que “el significado no se impone ni se transmite mediante la enseñanza directa, si no que se crea mediante las actividades de aprendizaje del estudiante, es decir, sus enfoques del aprendizaje. Biggs define dos tipos de enfoques de aprendizaje: el superficial y el profundo. En el superficial los alumnos solo estudian para un propósito general (por ejemplo, aprobar un examen, contestar un cuestionario), por lo que esto genera bajo nivel cognitivo. En el enfoque profundo, los alumnos estudian para aprender y buscan el significado y la aplicación de lo que están aprendiendo.

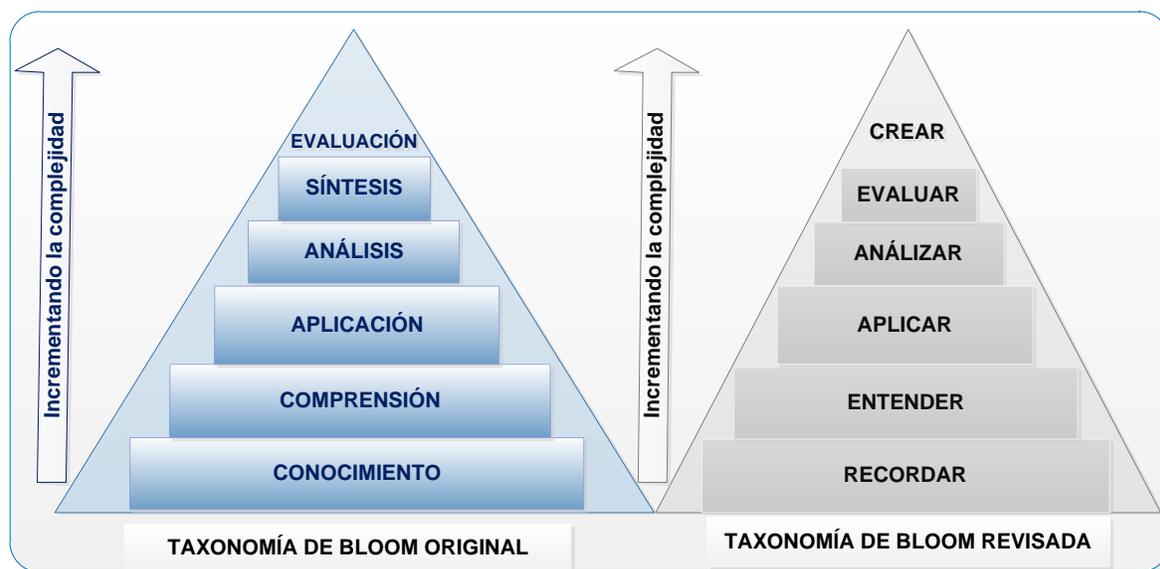
3.2.9 Evaluación de la Habilidad Cognitiva.

De acuerdo a Rongmei y Lingling (2009), un modelo para la evaluación de habilidades cognitivas se puede definir como:

$$M = (U, V, A). \quad \text{Ecuación 1}$$

Donde $U = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)$, es el peso de cada uno de los seis puntos del conocimiento de la taxonomía de Bloom. $V = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ son valores

asociados con: excelente, bueno, medio, aceptable y fallido Para definir un modelo que genere automáticamente el vector V se están haciendo pruebas para determinar si es más factible utilizar un modelo difuso o un modelo de redes bayesianas, de tal manera que con esta información podamos inferir el desempeño de los alumnos en base a cada habilidad del pensamiento e identificar en cual o cuales, el alumno tiene debilidades y generar el diseño instruccional que puede ayudar a fortalecer esas habilidades.



Esquema 7. Taxonomía de Bloom original y revisada. Fuente: Skiba, 2013

A es una matriz que se obtiene de la siguiente manera:

1) En primer lugar se crea una tabla, la cual denotamos por R de m renglones y seis columnas, donde m es el tipo de preguntas en cada una de las rúbricas y las rúbricas corresponden a los puntos de la Taxonomía de Bloom. Los elementos r_{ij} de la tabla se definen como: 1 si la respuesta del tipo de pregunta i y la habilidad del pensamiento j es correcta, -1 si es incorrecta y 0 si no hay respuesta.

2) Una vez que se tengan las respuestas de un tipo de rúbrica se genera la tabla R para dicha rúbrica y a su vez se puede obtener un renglón de la matriz A como sigue:

$$A=(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6) \quad \text{Ecuación 2}$$

Donde $a \in [0,1]$ y se define como:

$$a_i = \frac{r_{ij}(1)}{r_{ij}(1)+r_{ij}(0)+r_{ij}(-1)} \quad \text{Ecuación 3}$$

$r_{ij}(1)$ se define como el número de respuestas correctas para cada una de las habilidades cognitivas, $r_{ij}(0)$ es el número de preguntas sin respuesta y $r_{ij}(-1)$ es el número de respuestas incorrectas para cada una de las habilidades cognitivas.

Por lo tanto, la matriz A cuya dimensión es $n*6$ está compuesta por las respuestas de todas las rúbricas aplicadas.

Por último, M se define como:

$$M = \sum_{i=1}^6 g_i \times u_i \quad \text{Ecuación 4}$$

Donde:

$$G = W \cdot A = (g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6) \quad \text{Ecuación 5}$$

Donde el vector W define el peso de cada rúbrica, esto es:

$$W = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, \dots w_n) \quad \text{Ecuación 6}$$

3.2.10 Enseñanza del Álgebra

Las variables son representaciones simbólicas de especial importancia para el aprendizaje del álgebra y para tener éxito en la comprensión de las matemáticas superiores, pero los mecanismos de cómo los estudiantes relacionan una variable a lo que representa no se conocen bien (Pollack, 2012). La habilidad de trabajar con sistemas de símbolos es necesaria para el éxito en las matemáticas. La comprensión conceptual y la manipulación simbólica de los números arábigos son la base del éxito de los estudiantes con las operaciones matemáticas fundamentales (por ejemplo, de suma y multiplicación) y tipos de números (por

ejemplo, números enteros y fracciones). El autor argumenta que tan importante es la capacidad de trabajar con símbolos literales o variables (letras usadas en un contexto matemático para representar objetos o cantidades). El éxito en las matemáticas superiores y la graduación de la universidad están asociados con el éxito en el álgebra. La comprensión del estudiante del concepto de variable (parte de la cual es la representación simbólica de cantidades variables) está en el corazón del razonamiento algebraico.

Actualmente el enfoque en el aprendizaje de matemáticas en las escuelas de nivel medio incluye el conocimiento procedimental y la comprensión conceptual. El aprendizaje del estudiante del conocimiento procedimental y la comprensión conceptual están en alineación con los principios y normas para la Matemática Escolar, que promueve el desempeño de habilidades del pensamiento de nivel superior, procesos de razonamiento y justificaciones comunicativas. El conocimiento procedimental implica reglas y procedimientos de aprendizaje con el fin de llevar a cabo las tareas matemáticas de rutina y utilizar el simbolismo que representa para las matemáticas (Ross y Willson, 2006). Las estrategias pedagógicas eficaces para promover el crecimiento de estudiantes de escuelas de nivel medio, tanto en el conocimiento procedimental y la comprensión conceptual relacionada con la hebra del álgebra deben ser determinadas para ayudar a los estudiantes en la comprensión de la conexión de los temas de álgebra con otros temas de matemáticas, con el fin de obtener un panorama más amplio de comprensión de las matemáticas.

Woodbury (2000) citado en Ross y Willson (2006) menciona que: El punto de enseñar y aprender sobre cualquier tema algebraico es cómo el tema se conecta con los espacios conceptuales de mayor tamaño de los sistemas de números y la teoría de números y con la representación simbólica y la teoría de ecuaciones. La literatura sobre la adquisición tanto de conocimiento procedimental y la comprensión conceptual en el área de álgebra es bastante escasa y se compone de actividades sugeridas, con pocos estudios de investigación.

Modelo 3UV

La variable algebraica como una entidad heterogénea también ha sido investigada en relación con los obstáculos que encuentran los estudiantes para verla como una entidad global con varios lados. Esta visión requiere que los estudiantes trabajen con cada uso por separado, mientras que al mismo tiempo desarrollen la flexibilidad para cambiar de un uso a otro. Varios autores han encontrado que los estudiantes en diferentes años de estudio tienen serias dificultades en la interpretación de los diversos papeles que una variable puede adoptar en un mismo problema y en hacer un cambio flexible de uno a otro. El modelo 3UV, es un esquema en el cual los logros y dificultades de los estudiantes en relación con la variable algebraica fueron analizados (Álvarez et al., 2015).

El modelo 3UV (tres usos de las variables) surgió de un análisis de lo que se requiere para hacer ejercicios y problemas de álgebra de libros de texto estándar. El análisis reveló que, en los cursos de álgebra elemental, a las variables se les asignan esencialmente tres usos: como incógnita, como número general y para simbolizar relaciones funcionales. También se identificaron una serie de factores a los que se enfrenta el usuario para resolver problemas o hacer ejercicios de álgebra. Estos factores, que están relacionados con diferentes niveles de abstracción, se sintetizan en las Tablas 7, 8 y 9 (Ursini et al., 2008).

3.2.11 Disertación sobre la Teoría del Aprendizaje

El término “aprendizaje”, en su totalidad es muy amplio y muy complejo. Dentro del contexto de esta investigación, se considera muy importante partir de este concepto ya que el objetivo de la investigación se centra en ayudar a que los alumnos aprendan a resolver problemas, aunque, al mencionarlo, muchas veces se puede escuchar como una tarea muy ambiciosa y más aún si se pretende lograr a través de una herramienta tecnológica.

Tabla 7. Factores en la resolución de problemas con incógnita

Nivel	La solución exitosa de problemas y ejercicios que implican una incógnita requiere:
U1	Reconocer e identificar en una situación problemática la presencia de algo desconocido que puede determinarse teniendo en cuenta las restricciones del problema.
U2	Interpretar los símbolos que aparecen en la ecuación, como la representación de los valores específicos que se pueden determinar considerando las restricciones dadas.
U3	Sustituir en la variable el valor o valores que hacen que la ecuación sea verdadera.
U4	Determinar la cantidad desconocida que aparece en las ecuaciones o problemas al realizar las operaciones algebraicas y / o aritméticas requeridas.
U5	Simbolizar las cantidades desconocidas identificadas en una situación específica y utilizarlas para plantear ecuaciones.

Tabla 8. Factores en la resolución de problemas con número general

Nivel	La solución exitosa de problemas y ejercicios que involucran un número general requiere:
G1	Reconocimiento de patrones, la percepción de las reglas y métodos en secuencias numéricas y en familias de problemas.
G2	Interpretar que un símbolo que representa una entidad general indeterminada puede asumir cualquier valor.
G3	Deducir reglas y métodos generales para distinguir los aspectos invariantes de las variables en las secuencias y familias de problemas.
G4	Manipular (simplificar, desarrollar) las expresiones generales.
G5	Simbolizar reglas o métodos generales.

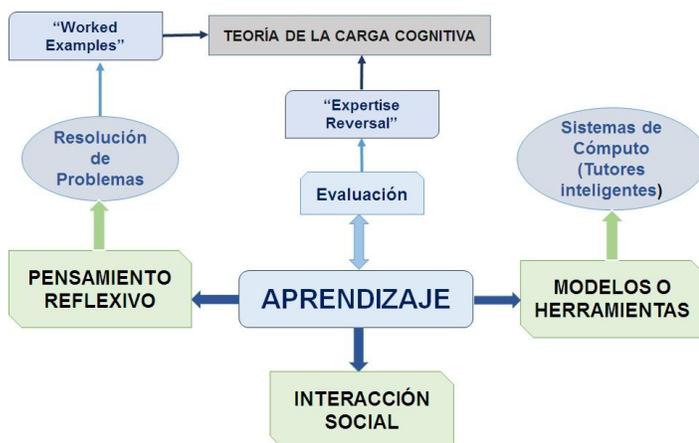
Tabla 9. Factores en la resolución de problemas con relación funcional

Nivel	La solución satisfactoria de los problemas y ejercicios que involucran variables en una relación funcional requiere:
F1	Reconocer la correspondencia entre las variables relacionadas independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficos, problemas verbales o expresiones analíticas).
F2	Determinar los valores de la variable dependiente dado el valor de la independiente.
F3	Determinar los valores de la variable independiente dado el valor de la dependiente.
F4	Reconocimiento de la variación conjunta de las variables involucradas en una relación independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficos, expresiones, etc).
F5	Determinar la gama de variación de una variable dada el dominio de la otra.
F6	Simbolizar una relación funcional basada en el análisis de los datos de un problema.

En el Esquema 8 se toma como base el aprendizaje para que, a través de sus tres factores influyentes se vea la relación que existe entre la resolución de problemas, la teoría de la carga cognitiva y los sistemas de cómputo inteligentes.

Dentro del marco de la investigación, se puede decir que el *aprendizaje* es la obtención de habilidades y estrategias que pueden llevar al estudiante a analizar problemas relacionados con el manejo de variables como incógnita, como número general y como función. Una vez analizados, el estudiante puede ser capaz de abstraer su proceso de solución y llevar a cabo de manera satisfactoria la resolución de cada uno de los pasos del problema hasta resolverlo. De esta manera podremos decir que el alumno está logrando un aprendizaje significativo

que lo conducirá a almacenar de manera permanente los conceptos de álgebra. Así mismo se puede mencionar que este aprendizaje lo conducirá a desarrollar un proceso de abstracción que lo ayudará a lograr los niveles más altos de la teoría del alineamiento constructivo.



Esquema 8. El aprendizaje y su relación con algunos conceptos y teorías del proyecto. Fuente: Diseño propio

Como se mencionó en el alineamiento constructivo, la evaluación es un elemento primordial en el aprendizaje y en el Esquema 8 se puede ver que a través de la evaluación, se relaciona el aprendizaje con la teoría de la carga cognitiva. En muchos de los artículos revisados, el término de evaluación lo manejan como valoración (“assessment” en inglés), incluso, la parte inicial de la definición del concepto, menciona que la valoración es la evaluación del aprendizaje, es decir, define la valoración en términos de la evaluación. Con la revisión de la literatura se pudo observar que esta situación es muy común en el manejo de herramientas automatizadas para ayudar a la evaluación, es decir, la parte de la valoración la relacionan con la herramienta. Y es que cuando se quiere automatizar la evaluación, entra el dilema de cómo realizar este proceso, sin caer en situaciones que puedan ser subjetivas, sin embargo, desde un punto de vista muy particular, la evaluación, ya sea realizada de forma manual o con herramientas automatizadas, puede caer en la subjetividad, ya que influyen muchos factores que pueden alterar la evaluación. Por ejemplo, si consideramos la evaluación a través de pruebas escritas algunos de dichos factores pueden ser:

- Que los alumnos copien.
- Que el diseño de la prueba no mida o no este alineado con los objetivos del aprendizaje.
- Que en la revisión de la prueba influyan factores propios del revisor como: cansancio, aburrimiento, exceso de trabajo y que conduzcan a obtener una evaluación errada.

Así mismo, una herramienta automatizada, a lo mejor puede ayudar en algunos de los factores antes mencionados, como el evitar que los alumnos copien, mediante la aplicación y evaluación automatizada de los elementos de medición, pero en este punto entra el problema de cómo hacer que la herramienta observe o detecte características propias del alumno, relacionadas con sus fortalezas o debilidades en el tema, ya que en este caso las respuestas de las pruebas tienen que ser diseñadas de tal manera que el sistema las pueda evaluar, a menos que se integre una herramienta computacional más sofisticada, como las que son capaces de simular la toma de decisiones.

Por último, en relación con la evaluación y el aprendizaje alineado, es importante considerar estrategias tanto cualitativas como cuantitativas, por lo cual es importante considerar el manejo de las taxonomías de Bloom, y la taxonomía SOLO para la evaluación.

Desde el punto de vista del manejo de herramientas computacionales asociadas a la resolución de problemas de álgebra se puede decir que la *evaluación* consiste en implementar estrategias que ayuden a identificar el logro de objetivos que conduzcan al estudiante a encontrar las formas de abstraer y resolver un problema de álgebra; y en su caso, que dicha evaluación permita identificar las fortalezas y debilidades del alumno en este contexto.

3.2.12 Teoría de la Interacción Humano – Computadora

La interacción Humano Computadora (IHC) es el campo multidisciplinario que estudia las relaciones entre las personas y las computadoras, proponiendo

métodos para diseñar y evaluar sistemas interactivos, no solo para hacerlos eficientes y seguros, sino también con el noble propósito de elevar la calidad de la experiencia de los usuarios, en el desarrollo de actividades que utilizan tecnologías de información y comunicación (Muñoz-Arteaga, González-Calleros, y Sánchez-Huitrón, 2015).

Dentro de la IHC, existen diversas metodologías o teorías que ayudan a la mejorar el desarrollo y la implementación de interfaces, con el objetivo de desarrollar sistemas interactivos eficientes. Dos metodologías que han tenido auge dentro de la IHC, son la gamificación y las interfaces tangibles, las cuales se han considerado como sustento para el desarrollo del prototipo semi – automatizado de este proyecto de investigación.

Gamificación

Deterding, Dixon, Khaled, y Nacke, (2011) definen de manera general y sencilla, el término gamificación como el uso de características de elementos de diseño para juegos en un contexto de no juego. Por otra parte, en (Seaborn y Fels, 2014) mencionan que el término gamificación puede ser definido como “el uso intencional de elementos de juego para una experiencia completa del juego de tareas y contextos que no son juegos. Los elementos del juego son los patrones, objetos, principios, modelos y métodos inspirados directamente por los juegos”. Así mismo, mencionan que, en la educación, el término gamificación se ha utilizado para referirse al aprendizaje basado en juegos digitales (ABJD) y en juegos serios en general. Por lo que la gamificación es el uso de la mecánica basada en juegos, la estética y el pensamiento del juego para involucrar a la gente, motivar la acción, promover el aprendizaje, y resolver problemas.

La gamificación de Sistemas Tutoriales Inteligentes (STI) debe ser hecha con cuidado y de ser posible sustentada por estudios empíricos (Long y Alevan, 2014). En un STI el control compartido entre el estudiante y el sistema han mostrado alguna promesa. Las formas simples de control compartido, en el que el sistema y los estudiantes comparten las responsabilidades para seleccionar

problemas en el sistema, han llevado a un aprendizaje comparable con el control completo del sistema. Sin embargo, estas técnicas simples pueden no ser tan atractivas como podrían ser, ni tampoco sacar el máximo provecho de la capacidad de los STI para tomar una buena decisión en la selección de los problemas.

Faghihi et al., (2014) mencionan que uno de los objetivos importantes de los Sistemas Tutoriales Inteligentes es mantener la motivación de los estudiantes durante las sesiones de entrenamiento. Muchos métodos psicológicos como el constructivismo y el instruccionalista se utilizan para involucrar a los estudiantes y motivarlos durante las sesiones de entrenamiento.

Para hacer una sesión de aprendizaje, divertida atractiva y fácil, podemos utilizar gamificación y técnicas de Sistemas Tutoriales Inteligentes (STI), tales como (Faghihi et al., 2014):

- 1) Competencia y retroalimentación: Los jugadores saben constantemente la situación en la que se encuentran y donde se encuentran todos los demás. También reciben consejos y se les informa acerca de su progreso hacia las metas a corto plazo y a largo plazo. Una ligera diferencia entre los ambientes de gamificación (AG) y los STI por retroalimentación es que los STI usan mensajes como consejos para motivar, y confirman las acciones de los estudiantes. Sin embargo, los AG utilizan estrategias gratificantes tales como insignias;
- 2) Insignias: una vez que un jugador alcanza una meta, se muestra claramente junto con el marcador en el menú principal de la aplicación; 3) Subir de nivel: ya que los jugadores realizan una tarea, el juego los promueve a seguir con niveles más altos.

Interfaces Tangibles

Otros elementos que se pueden incluir en un sistema tutorial inteligente con gamificación son las interfaces de usuario tangible (IUT), que son interfaces que

se ocupan de proporcionar representaciones tangibles a la información y controles digitales, lo que permite a los usuarios captar los datos, literalmente con sus manos. La motivación original detrás de una interfaz de usuario tangible es, conectar el mundo físico con el digital mediante el uso de artefactos físicos y, por lo tanto, mantener la riqueza de las interacciones físicas. Esto es novedoso y contrario a la tendencia principal que se centra en forzar al usuario a introducirse en un mundo virtual (Cuendet, Dehler-Zufferey, Ortoleva, y Dillenbourg, 2015). En lugar de hacer que los píxeles se fundan en una interfaz, las IUT utilizan formas físicas que se adaptan perfectamente al entorno físico de un usuario. Las IUT tienen como objetivo aprovechar estas habilidades de interacción aptica, un enfoque significativamente diferente de las interfaces gráficas de usuario. La idea clave de una IUT sigue siendo: dar forma física a la información digital, permitiendo que sirvan como la representación y los controles de sus contrapartes digitales. Las IUT hacen que la información digital sea manipulable directamente con nuestras manos y perceptible a través de nuestros sentidos periféricos y por medio de su representación física (Ishii, 2008).

Zuckerman et al., (Zuckerman, Arida, y Resnick, 2005) propusieron una clasificación de las interfaces tangibles (o manipulativas) en dos tipos: Manipuladores inspirados por Froebel (FiM por sus siglas en inglés) y manipuladores inspirados en Montessori (MiM por sus siglas en inglés). Las interfaces tangibles de FiM utilizan materiales que simulan estructuras del mundo real, como bloques de madera que se pueden usar para construir un castillo, o piezas de plástico que se pueden usar para construir un avión. Por otro lado, los manipuladores inspirados en Montessori (MiMs) modelan estructuras más abstractas, donde cada bloque representa, por ejemplo, una operación matemática o cualquier otro concepto abstracto.

3.2.13 Disertación sobre la teoría de la interacción humano - computadora

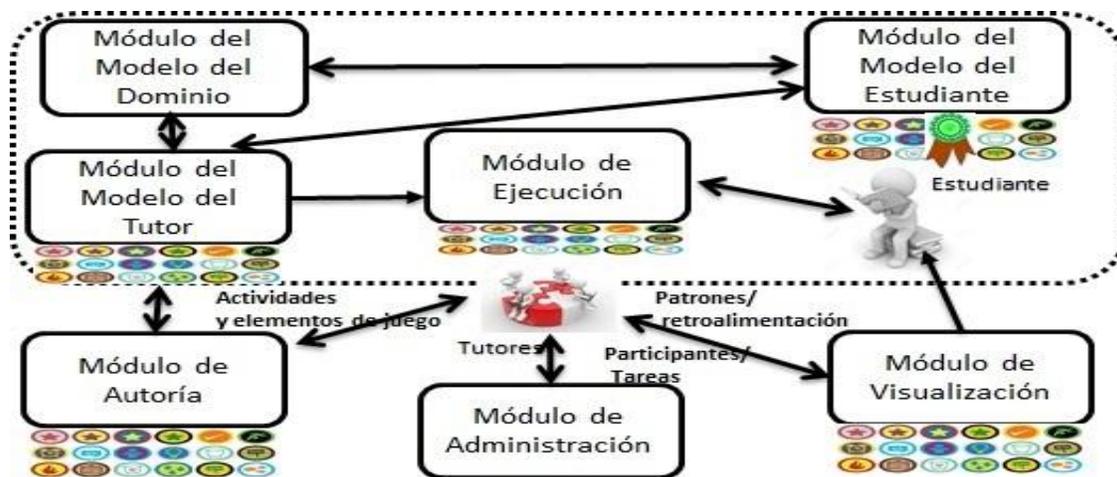
Dentro del contexto de esta investigación, se considera que la enseñanza del álgebra, el diseño instruccional y la gamificación van de la mano, ya que los tres tienen el mismo objetivo, idear estrategias que ayuden a resolver problemas, es decir, la enseñanza del álgebra se realizará a través de la resolución de problemas, el diseño instruccional se basará en el manejo de ejemplos “trabajados”, ejemplos que deben ir disminuyendo el número de pasos resueltos hasta convertirse en un problema que el estudiante debe resolver por sí solo y la gamificación ayudará a crear estrategias basadas en recompensas y retos que conduzcan a la resolución de problemas. Al agregarle al diseño instruccional estrategias de gamificación se puede verificar si el manejo de estrategias de juegos como las recompensas, los retos y otras actividades gamificadas pueden ayudar a motivar al alumno y aumentar su habilidad cognitiva para resolver problemas de álgebra.

3.2.14 Sistemas Tutoriales Inteligentes

Al hablar de educación con tecnología, no solo se refiere al uso de computadoras, el software también es indispensable, y un tema relacionado con el desarrollo de herramientas para el proceso de enseñanza – aprendizaje son los Sistemas Tutoriales Inteligentes (STI) que son sistemas informáticos diseñados para ayudar y facilitar la tarea de aprendizaje para el alumno. Tienen experiencia en la medida en que conocen la materia enseñada (conocimiento del dominio), cómo enseñar (conocimiento pedagógico) y también la forma de adquirir información en el alumno (representante alumno) (Zouhair et al., 2012). Por definición, los STI son sistemas de instrucción basados en computadora que intentan recopilar información sobre el estado de aprendizaje de un estudiante y tener esta información para tratar de adaptar la instrucción a las necesidades del alumno (Fazel Zarandi et al., 2012). Los STI modelan la comprensión del estudiante a

medida que avanzan en las tareas, y la comparan con un modelo de lo que un experto en ese dominio entiende (García, Reyes-García, y Morales, 2004), (Matsuda et al., 2015), (Reed et al., 2013). Hay muchas investigaciones relacionadas con el diseño e implementación de sistemas informáticos para ayudar a un alumno en el aprendizaje. Hay, por ejemplo, tutores o representantes docentes que acompañan a los alumnos mediante la propuesta de actividades de recuperación. También están los agentes de apoyo para la colaboración en grupo fomentando y facilitando la discusión entre los integrantes. Otras soluciones se basan en agentes que incorporan y tratan de hacer la cooperación entre los diversos sistemas de tutoría inteligente. Dado el gran número de alumnos que abandonan su formación, la adaptación de aprendizaje de acuerdo al perfil del alumno se ha hecho indispensable en la actualidad, lo cual es una actividad que puede ser realizada por un tutorial inteligente.

Un Sistema Tutorial Inteligente es una maquinaria compleja, por tanto, diseñar un STI es una tarea difícil y requiere mucho tiempo. Los diferentes componentes de los STIs requieren diferentes técnicas para ayudar a la enseñanza (Matsuda et al., 2015). En el Esquema 9 se muestra la arquitectura de un STI propuesta en González, Mora y Toledo (2014). Esta arquitectura maneja siete módulos; en cinco de ellos se pueden implementar estrategias de gamificación, dichos módulos son: el del modelo del tutor, el de autoría, el de ejecución, el del modelo del estudiante y el de visualización. Las actividades de cada uno de los módulos se describen en la segunda columna de la **Tabla 10**, y en base a dichas actividades, se propusieron las actividades del tutor cognitivo de este proyecto de investigación, las cuales se describen en la tercera columna de la Tabla 10.



Esquema 9. Arquitectura de un Sistema Tutor Inteligente con gamificación.

Tutores Cognitivos

El tutor cognitivo es un tipo de sistema tutorial inteligente (STI), con una eficacia probada desde hace mucho tiempo. La eficacia de los tutores cognitivos se basa en su capacidad de proporcionar apoyo individualizado para el aprendizaje de las habilidades cognitivas complejas a través de la práctica de resolución de problemas. Seleccionan problemas apropiados a ser resueltos, proporcionan información y consejos para resolver problemas y evaluar los progresos del aprendizaje de cada estudiante. Los tutores cognitivos individualizan la instrucción mediante la selección de problemas basados en un modelo del estado actual del conocimiento del estudiantes que se actualiza constantemente mediante un proceso bayesiano llamado " el conocimiento de rastreo " y la técnica denominada "modelo de rastreo" (Salden, et al., 2010). El modelo de rastreo es una versión heurística del reconocimiento del plan que trata de identificar las habilidades cognitivas en el modelo de expertos que reproduce suficientes pasos para la resolución de problemas realizados por los estudiantes. Estas técnicas son independientes del dominio y su comportamiento depende de la naturaleza y la calidad del modelo experto. Dado un modelo experto, las técnicas anteriores mantienen automáticamente un modelo de estudiante, que a su vez permite que el tutor cognitivo automáticamente realice la tutoría adaptativa. Por lo tanto, el diseño de un tutor cognitivo se reduce al diseño de los componentes dependientes de dos

dominios: (1) la interfaz gráfica de usuario (GUI) llamada una interfaz de tutoría para que los estudiantes puedan mostrar su trabajo, y (2) el modelo experto que represente las habilidades que deben ser aprendidas con sugerencias y mensajes de error asociados a cada habilidad (Matsuda et al., 2015).

Los tutores cognitivos ofrecen una serie de ventajas para la investigación sobre ejemplos prácticos y la reversión del expertise. En primer lugar, es posible sacar provecho de la capacidad de los tutores cognitivos para seguir el crecimiento del conocimiento de cada estudiante a través del tiempo. Esta evaluación del conocimiento puede ser usada como la base para la incorporación de un mecanismo de desvanecimiento de ejemplos individualizados adaptativos dentro de un tutor cognitivo. En segundo lugar, los tutores cognitivos son “vehículos convenientes” para la investigación en el aula (Salden, Koedinger, et al., 2010).

3.2.15 Teoría de la Lógica Difusa

La lógica difusa es una extensión de la lógica booleana hecha por Lofti Zadeh en 1965, basada en la teoría matemática de conjuntos difusos, que es una generalización de la teoría clásica de conjuntos. Al introducir la noción de grado en la verificación de una condición, permite una condición de estar en un estado distinto de verdadero o falso, la lógica difusa proporciona una flexibilidad de razonamiento, lo que permite tener en cuenta las inexactitudes e incertidumbres. Una ventaja de la lógica difusa, con el fin de formalizar el razonamiento humano, es que las reglas se establecen en lenguaje natural (Franck Dernoncourt, 2013).

La lógica difusa se basa en la teoría de conjuntos difusos, que es una generalización de la teoría clásica de conjuntos. Para diferenciar con el concepto de conjunto difusos, se denotan a los conjuntos que se estudian tradicionalmente en las matemáticas como conjuntos clásicos. Por ejemplo, en los conjuntos clásicos, 5, 10, 7, 6, 9 es un conjunto de números enteros. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 es el conjunto de enteros entre 0 y 10. 's' 'd'; 'Z', 'a' es un conjunto de caracteres. "Sitio", "de", "cero" es un conjunto de palabras. También podemos

crear conjuntos de funciones, suposiciones, definiciones, conjuntos de individuos (es decir, una población), etc. e incluso conjuntos de conjuntos (Roger Jang, Sun, y Mizutani, 1997).

Tabla 10. Actividades de cada uno de los módulos del Sistema Tutorial Inteligente

MÓDULO DEL TUTOR	ACTIVIDAD (González et al., 2014)	PROPUESTA DE ACTIVIDADES PARA EL TUTOR COGNITIVO
Modelo del estudiante	<ul style="list-style-type: none"> Se encarga de representar el estado cognitivo del estudiante. Es responsable de adaptar el sistema a las respuestas de los usuarios 	<ul style="list-style-type: none"> Cuestionario para determinar el estilo de aprendizaje Modelo para el instrumento de medición Modelo difuso para medir la habilidad cognitiva
Modelo del dominio	<ul style="list-style-type: none"> Contiene la representación del conocimiento de los expertos en áreas relacionadas a los procesos de evaluación y metodologías de enseñanza – aprendizaje. 	<ul style="list-style-type: none"> Modelo basado en mapas cognitivos difusos para representar el conocimiento de los expertos en la enseñanza de temas de álgebra Modelo difuso para determinar los tipos de problemas de álgebra
Modelo Tutor	<ul style="list-style-type: none"> Contiene información para decidir qué tareas son presentadas al estudiante de acuerdo con los objetivos de aprendizaje del módulo del dominio. 	<ul style="list-style-type: none"> Modelo para definir las estrategias pedagógicas basadas en juegos y tipos de problemas
Autoría	<ul style="list-style-type: none"> Crea actividades personalizadas 	<ul style="list-style-type: none"> Modelo para proponer actividades personalizadas en base a la habilidad cognitiva de los alumnos
Ejecución	<ul style="list-style-type: none"> Interactúa con los estudiantes Conocimiento del juego 	<ul style="list-style-type: none"> Definir las estrategias para la interacción
Visualización	<ul style="list-style-type: none"> Análisis del aprendizaje Retroalimentación del juego 	<ul style="list-style-type: none"> Interfaces tangibles
Administración	<ul style="list-style-type: none"> Administración de los estudiantes Creación de grupos Asignación de actividades 	<ul style="list-style-type: none"> Manejo de plataforma y bases de datos para la organización de la información y la asignación de las actividades

Fuente: Diseño propio.

Una función de pertenencia (también llamada función de indicador o función característica) es una función que explica la pertenencia o no a un conjunto. Este concepto de pertenencia es muy importante porque la lógica difusa se basa en el concepto de membresía difusa. Esto simplemente significa que algo puede pertenecer a un conjunto con un valor de 0.8, en contraste con la teoría de conjuntos clásicos donde, como acabamos de ver, la pertenencia es 0 (no pertenece) o 1 (pertenece).

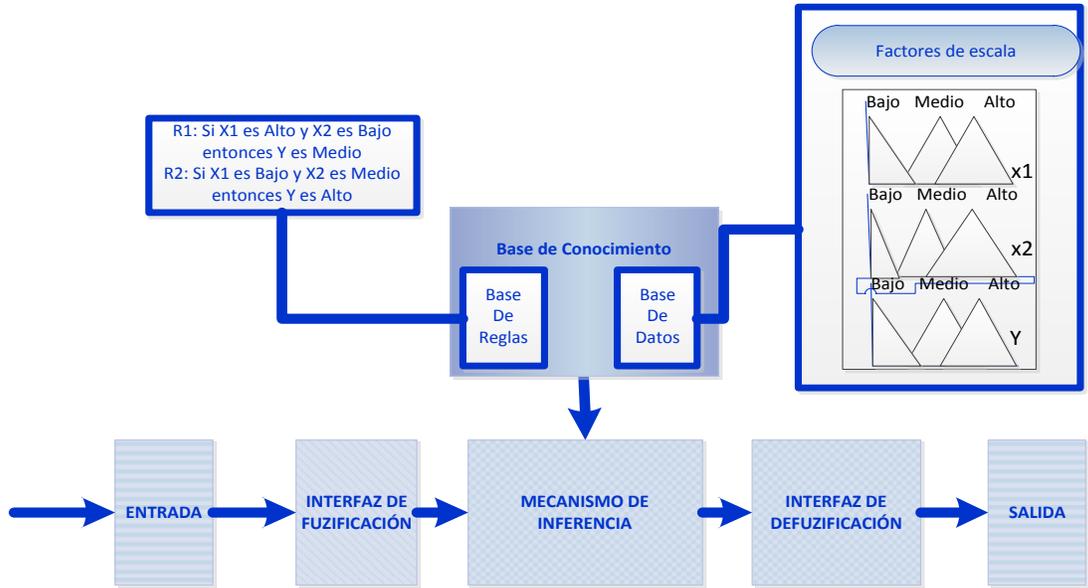
Formalmente un conjunto difuso se define como (Roger Jang et al., 1997):

Sea X un conjunto. Un subconjunto difuso A de X se caracteriza por una función de pertenencia. $F^A: X \rightarrow [0, 1]$. (En teoría, es posible que la salida sea mayor que 1, pero en la práctica casi nunca se usa).

La forma de la función de pertenencia se elige arbitrariamente siguiendo el consejo del experto o mediante estudios estadísticos: sigmoide, hiperbólica, tangente, exponencial, gaussiana o cualquier otra forma.

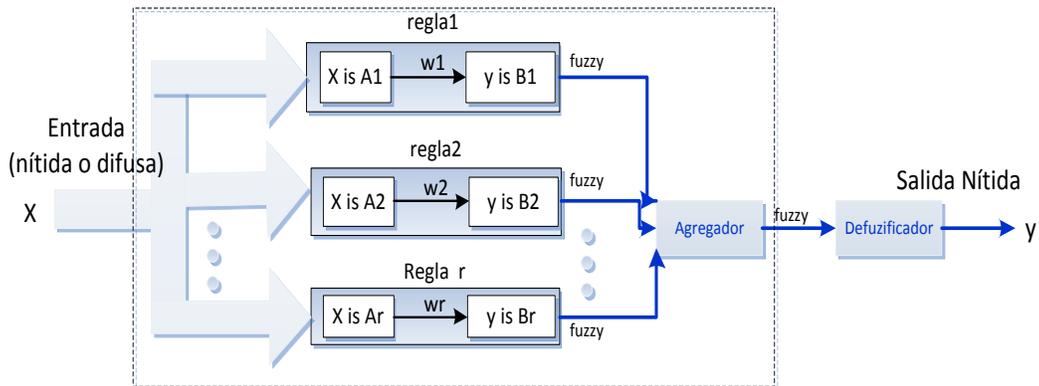
Sistema de Inferencia Difuso

Un Sistema de Inferencia Difuso (SID) es un esquema computacional popular basado en los conceptos de la teoría de los conjuntos difusos, las reglas difusas "Si-Entonces" y el razonamiento difuso. Ha encontrado aplicaciones exitosas en una amplia variedad de campos, como control automático, clasificación de datos, análisis de decisiones, sistemas expertos, predicción de series temporales, robótica y reconocimiento de patrones. La estructura básica de un sistema de inferencia difusa consiste en tres componentes conceptuales (ver Esquema 10): *una base de reglas*, que contiene una selección de reglas difusas; *una base de datos* (o diccionario), que define las funciones de pertenencia utilizadas en las reglas difusas; y un *mecanismo de razonamiento*, que realiza el procedimiento de inferencia sobre las reglas y los hechos dados para derivar un resultado o conclusión razonable (Roger Jang et al., 1997).



Esquema 10. Arquitectura de un Sistema de Inferencia Difuso básico.
Fuente: Roger Jang et al., 1997.

La base del sistema de inferencia difuso es que: las variables de salida difusas se deducen de variables difusas de entrada de acuerdo con un conjunto de reglas de inferencia lógica en términos lingüísticos, y estas reglas se extraen de la base de conocimiento de un sistema difuso. En el Esquema 11 se muestra un sistema de inferencia difuso donde la línea punteada indica un sistema de inferencia difuso básico con salida difusa y el bloque de defusificación sirve para transformar una salida difusa en una salida dura.



Esquema 11. Diagrama de bloques de un sistema de inferencia difuso.
Fuente: Roger Jang et al., 1997

Formalmente, un Sistema de Inferencia Difusa es aquel, donde $U=U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n \subset R^n$ es el espacio de entrada y $V \subset R$ es el espacio de salida. Una base de reglas difusas incluye un conjunto de reglas “Si-Entonces” difusas. La parte medular del SID es ese conjunto de reglas “Si-Entonces” y los otros componentes tales como las funciones de membresía, se usan para implementar dichas reglas de manera razonable, eficiente y real. Estas reglas difusas “Si-Entonces” son empleadas por el SID para definir un mapeo de conjuntos difusos en el universo de entrada de Discurso $U \subset R^n$ a conjuntos difusos en el universo de salida del discurso $V \subset R$, basado en principios de lógica difusa.

Existen diferentes tipos de sistemas de inferencia difusos, y sus diferencias radican en las consecuencias de sus reglas difusas, ya que los procedimientos de agregación y defuzzificación difieren. Los SID de tipo Mamdani, son unos de los más comunes y es el que se utiliza en los SID propuestos en este proyecto.

Sistemas de Inferencia Difusa de tipo Mamdani

En 1975, Mamdani representó uno de los primeros sistemas difusos que aplicaron un conjunto de reglas difusas, suministradas por operadores humanos experimentados, para controlar una máquina de vapor y una combinación de calderas (Pourjavad y Mayorga, 2017).

Las reglas que se manejan en un sistema de inferencia de tipo Mamdani son como la siguiente:

“Si X_1 es Alto y X_2 es Bajo ENTONCES Y es ALTO”

Ventajas Del Fis De Tipo Mamdani (Subhedar y Birajdar, 2013)

- Facilidad para la derivación de reglas.
- Interpretabilidad de las reglas difusas
- Fueron propuestos antes y se han utilizado con más frecuencia

Desventajas

- ❖ No garantizan la continuidad de la superficie de salida.
- ❖ Menor eficiencia computacional

El modelo de Inferencia

Para el diseño del modelo de inferencia en principio se debe:

1. Elegir el tipo de motor de inferencia.
 - ❖ Basado en reglas individuales
 - ❖ Basado en la composición de reglas.
2. Elegir la representación del significado de las reglas difusas
 - Operadores de conjunción, disyunción, complemento, modificadores lingüísticos, según sea el caso.
 - Operador de implicación.
 - Operador de agregación de reglas.

De manera general, la inferencia en el modelo de Mamdani, tiene la siguiente estructura:

x es A' y y es B'

si x es A_1 y y es B_1 , entonces z es C_1

si x es A_2 y y es B_2 , entonces z es C_2

•
•
•

z es C'

el cual es un modelo de implicación del modus ponens difuso, con dos variables lingüísticas difusas de entrada (x,y) . En el modelo, la primera regla es un hecho o una premisa, y después se tienen un conjunto de reglas difusas SI – ENTONCES, con dos antecedentes y un consecuente y finalmente, después de la línea se tiene un conjunto conclusión C' . El objetivo de la inferencia es precisamente calcular la

función de membresía C' a partir de A' y B' que son las entradas, aplicando el modus ponens difuso, lo cual se puede hacer utilizando los siguientes operadores:

El operador T-norm (\wedge mínimo) es usualmente adoptado por el conectivo lógico "and", como se expresa en la siguiente ecuación (Pourjavad y Mayorga, 2017):

$$\mu_A(X) \text{ and } \mu_B(X) = \text{MIN}\{\mu_A(X), \mu_B(X)\}$$

Para el conectivo lógico "or" o S-norm (\vee máximo) se utiliza la siguiente ecuación

$$\mu_A(X) \text{ OR } \mu_B(X) = \text{MAX}\{\mu_A(X), \mu_B(X)\}$$

Para cada regla activada, la máquina de inferencia aplica una relación de implicación R entre el número difuso que se obtiene de la operación lógica y el consecuente, \tilde{B} . Un operador de implicación que comúnmente se utiliza es el mínimo, expresado en la siguiente ecuación:

$$\mu_R(x, y) = \text{MIN}\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

Unos operadores alternativos son el Max-Min (Zadeh) y la multiplicación (Larsen), los cuales se describen en las siguientes ecuaciones:

$$\mu_R(x, y) = \text{MAX}\{1 - \mu_A(x), \text{MIN}\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}\}$$

$$\mu_R(x, y) = \{\mu_A(x) * \mu_B(x)\}$$

Método de Defusificación y desdifusión

La defusificación se refiere a la forma en que un valor duro es extraído de un conjunto difuso como un valor representativo. En general, hay cinco métodos para defusificar un conjunto difuso A de un universo de discurso Z (Roger Jang et al., 1997). Los métodos se explican a continuación:

1. **CENTRO DE ÁREA z_{COA}**: Es la estrategia de defusificación más ampliamente utilizada, la cual evoca el cálculo de los valores esperados

de las distribuciones de probabilidad. Se calcula mediante la siguiente ecuación:

$$z_{COA} = \frac{\int_z \mu_A(z) z dz}{\int_z \mu_A(z) dz}$$

donde $\mu_A(z)$ es la función de membresía de salida, agregada.

2. BISECTRIZ DE ÁREA Z_{BOA} : Debe satisfacer la siguiente ecuación

$$\int_{\alpha}^{Z_{BOA}} \mu_A(z) dz = \int_{Z_{BOA}}^{\beta} \mu_A(z) dz$$

donde $\alpha = \min\{z/z \in Z\}$ y $\beta = \max\{z/z \in Z\}$. Esto es, la línea vertical $z = z_{BOA}$ particiona la región entre $z = \alpha, z = \beta, y = 0$ y $y = \mu_A(z)$ dentro de dos regiones con la misma área.

3. MEDIA DE MÁXIMOS z_{MOM} : Es el promedio del máximo z en el cual la Función de membresía alcanza un valor máximo μ^* . Esto es:

$$z_{MOM} = \frac{\int_{Z'} z dz}{\int_{Z'} dz}$$

Donde $Z' = \{z/\mu_A(z) = \mu^*\}$

4. MÁS PEQUEÑOS DE LOS MÁXIMOS z_{SOM} : Es el mínimo (en términos de magnitud) del máximo de z .

5. MÁS GRANDE DE LOS MÁXIMOS z_{LOM} : Es el máximo (en términos de magnitud) del máximo de z .

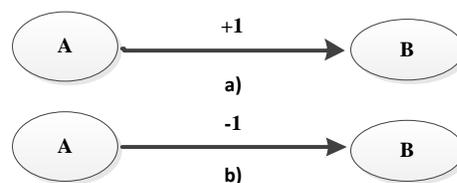
Mapas Cognitivos Difusos

Los mapas cognitivos difusos surgen a partir de los mapas cognitivos; estos últimos fueron introducidos por el politólogo Robert Axelrod (1976) en la década de 1970 para representar el conocimiento científico social. Robert Axelrod fue el primero en usar el término en referencia al contenido y la estructura de las mentes de los individuos, cambiando así su significado aplicado de referirse a un mapa que es cognitivo, a un mapa de la cognición. Usando la definición de Axelrod, los

mapas cognitivos son representaciones visuales de los constructos de un "modelo mental" de un individuo, y por lo tanto son análogos a los mapas conceptuales que representan el conocimiento o las creencias estructuradas de una persona (Kosko, 1986; Carvalho y Tomé, José, 1999; Gray, Sanre, y Gray, 2014). El mapeo cognitivo significa proyección de conocimiento, y un mapa cognitivo es básicamente una red asociativa dinámica que consiste en nodos y arcos dirigidos tales que los nodos representan información asociada al conocimiento del dominio y los arcos dirigidos representan relaciones de causa-efecto entre cada par de nodos (Kosko, 1986). La diferencia entre los mapas cognitivos y los mapas cognitivos difusos radica en que los primeros no pueden representar la fuerza de las relaciones causales (Miao y Liu, 1999).

Los Mapas Cognitivos Difusos (MCD) fueron propuestos por Kosko (Kosko, 1986), quien afirma que la mayoría del conocimiento es especificación de clasificaciones y causas. En general, las clases y las causas son inciertas (difusas o aleatorias), generalmente difusas. Esta incertidumbre da pie para manejar representaciones de conocimiento y bases de conocimiento, que conduzcan a una compensación en la adquisición / procesamiento del conocimiento. Por lo tanto, Kosko define los MCD como estructuras de grafos difusos para representar el razonamiento causal, analizar patrones de inferencia y actuar como un sistema dinámico no lineal. Los nodos son conceptos variables y las aristas son conexiones causales. Un arco positivo del nodo A al nodo B significa que A aumenta causalmente B. Un arco negativo de A a B significa que A disminuye causalmente B. En un mapa cognitivo no difuso, esto significa que el incremento causal de un nodo sobre otro es total, es decir, se considera que al incrementarse totalmente el concepto del nodo origen A y el peso asociado al eje que conecta el nodo origen al nodo destino es de 1 (Esquema 12a), entonces se interpreta como que el incremento del concepto del nodo destino B también es total, por el contrario, si el peso asociado al eje que conecta a los dos nodos es -1 (Esquema 12b), entonces al incrementarse totalmente el valor del nodo origen A da como consecuencia que el concepto del nodo destino B se decremente totalmente. Sin embargo, esta característica no incluiría la característica completa de los valores

difusos, ya que en general, los mapas cognitivos son demasiado vinculantes para la construcción de la base de conocimiento y porque la causalidad suele ser incierta. Los MCD combinan las fortalezas de los mapas cognitivos con la lógica difusa, al representar el conocimiento humano en una forma más representativa del lenguaje humano natural que las técnicas tradicionales de mapeo conceptual, los MCD facilitan la ingeniería del conocimiento y aumentan la concurrencia de fuentes de conocimiento. Los MCD también se pueden modelar en las computadoras, lo que permite el modelado dinámico de los sistemas cognitivos. La incertidumbre permite manejar grados de causalidad entre objetos causales (conceptos). Su estructura gráfica permite la propagación causal sistemática, en particular el encadenamiento hacia delante y hacia atrás y permite que las bases de conocimiento se desarrollen mediante la conexión de diferentes mapas cognitivos (Cole y Persichitte, 2000; Groumos, 2010).



Esquema 12. Mapa cognitivo con valores de -1 y +1 en las relaciones causales

Lo difuso indica que los mapas cognitivos a menudo consideran conceptos que se pueden representar como conjuntos difusos y las relaciones causales entre los conceptos pueden ser implicaciones difusas, probabilidades condicionales, etc. En el Esquema 13 se muestra un MCD general, en el que las aristas E_{ij} pueden tomar valores en el intervalo causal difuso $[-1, 1]$ permitiendo que se representen grados de causalidad (Gray et al., 2014):

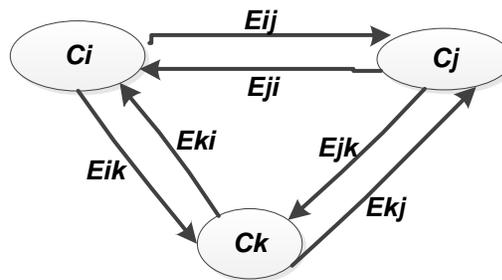
- $E_{jk} > 0$ indica causalidad directa (positiva) entre los conceptos C_j y C_k . Es decir, el aumento (disminución) en el valor de C_j lleva al aumento (disminución) en el valor de C_k .

- $E_{jk} < 0$ indica causalidad inversa (negativa) entre los conceptos C_j y C_k . Es decir, el aumento (disminución) en el valor de C_j conduce al decrecimiento (aumento) en el valor de C_k .

La conectividad de un MCD se puede representar convenientemente mediante una matriz de adyacencia

$$E = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & E_{ij} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix},$$

donde E_{ij} es el valor del arco desde el nodo C_i al nodo C_j .



Esquema 13. Una representación de un MCD con tres nodos.

Para el proceso de razonamiento del MCD, generalmente se usa una formulación matemática simple. Una implicación del modelo converge a una estabilidad global, equilibrio en el estado del sistema. Durante el proceso de inferencia, la secuencia de patrones revela el modelo de inferencia. La simplicidad del modelo del MCD consiste en su representación matemática y operación. Entonces, un MCD que consta de n conceptos, se representa matemáticamente mediante un vector de estado A , que reúne los valores de los n conceptos, y mediante la matriz E de pesos de $n \times n$. Cada elemento E_{ij} de la matriz indica el valor del peso entre los conceptos C_i y C_j . El valor A_i de cada concepto C_i en un momento $k + 1$ se calcula mediante la suma del valor anterior de A_i en un momento precedente t con el producto del valor A_j del nodo causal C_j en el momento precedente k y el valor del enlace causa-efecto e_{ij} . La representación matemática de los MCD tiene la siguiente forma (Kosko, 1988; Papageorgiou y Salmeron, 2014; Groumos, 2010; Aguilar, 2005):

$$A_i(k + 1) = f(A_i(k) + \sum_{j=1}^N A_j(k) \cdot e_{ji}) \quad \text{Ecuación 7}$$

donde $f(\cdot)$ es una función de umbral (activación). La función de umbral sigmoidea da valores de conceptos en el rango $[0, 1]$ y su representación matemática es:

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{-mx}} \quad \text{Ecuación 8}$$

donde m es un número real positivo y x es el valor $A^{(k)}_i$ en el punto de equilibrio. La función de transformación se usa para reducir la suma ponderada ilimitada a un cierto rango, lo que dificulta el análisis cuantitativo, pero permite comparaciones cualitativas entre conceptos (Papageorgiou y Salmeron, 2014). Los MCD se pueden usar para responder una pregunta "qué pasaría si" basada en un escenario inicial representado por un vector $S_0 = \{s_i\}$, para $i = 1 \dots n$, donde $s_i = 1$ indica que el concepto C_i se mantiene completamente en el estado inicial, y $s_i = 0$ indica que C_i no se mantiene (Aguilar, 2005).

Para caracterizar un sistema de la vida real, se debe conocer sus propiedades. Algunas de estas propiedades provienen de mediciones y, por lo tanto, están representadas por números reales. Sin embargo, en muchos casos, una gran cantidad de información proviene de estimaciones de expertos (Kreinovich y Stylios, 2015). El supuesto es que la combinación de opiniones incompletas y en conflicto con diferentes expertos puede anular el efecto de supervisión, ignorancia y prejuicio. Un experto dibuja un MCD según su experiencia. Es decir, cada experto proporciona la matriz de cada MCD individual, que luego se sintetiza en una matriz del MCD grupal. La matriz de grupo (E^G) podría ser calculada como (Aguilar, 2005):

$$E_{ji}^G = \max_t \{E_{ji}^t\}, \quad \text{Ecuación 9}$$

$\forall t = 1$ to number of experts (NE)

$$\text{O} \quad E_{ji}^G = \sum_{t=1}^{NE} b_t E_{ji}^t$$

donde E_{ji}^t es la opinión del experto t sobre la relación causal entre C_j y C_i , y b_t es el peso de credibilidad de la opinión del experto. En un sistema distribuido, se construye un MCD para cada subsistema. Entonces, todos los MCD se combinan en una matriz E aumentada para todo el sistema. La unificación de los distintos

MCD depende de los conceptos del MCD segmentado. Si no hay conceptos comunes entre los diferentes mapas, la matriz combinada E se construye de acuerdo con la ecuación 10 y la dimensión de la matriz E es el número total de conceptos distintivos en todos los MCD (Aguilar, 2004).

$$E = \begin{bmatrix} E_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & E_n \end{bmatrix} \quad \text{Ecuación 10}$$

Los MCD se pueden usar para varios propósitos, incluidas cuatro funciones (Papageorgiou y Salmeron, 2013):

- 1) *Explicativo*: se enfoca en reconstruir las premisas detrás del comportamiento de agentes dados, entendiendo las razones de sus decisiones, las acciones que toman y destacando cualquier distorsión y límite en su representación de la situación.
- 2) *Predicción*: Esta función se basa en predecir las decisiones y acciones futuras, o las razones que un agente determinado utilizará para justificar cualquier nueva ocurrencia.
- 3) *Reflexivo*: Esta función ayuda a los responsables de la toma de decisiones a reflexionar sobre su representación de una situación dada para asegurar su adecuación y posiblemente impulsar la introducción de cualquier cambio necesario.
- 4) *Estratégico*: la última función se basa en generar una descripción más precisa de una situación compleja.

Mapas cognitivos difusos en la educación

Las áreas y aplicaciones en las que se pueden usar los mapas cognitivos son diversas. Aunque el número de proyectos realizados en el campo de la educación es aún reducido, los mapas cognitivos son una herramienta muy útil, ya que representan un tipo de inteligencia distribuida, y pueden verse como artefactos

construidos para descargar tareas complejas, estructurar actividades, ahorrar trabajo mental y evitar errores. Cuando se crea una representación gráfica de un dominio, los mapas cognitivos liberan al usuario de tener que mantener dicha representación dentro de su memoria de trabajo, liberando así los recursos cognitivos para que puedan ser utilizados para la interpretación y el análisis del contenido (Cole y Persichitte, 2000).

La importancia de incluir los MCD difusos en Sistemas Tutoriales Inteligentes (STI) radica en el hecho de que lo ideal es que un STI puede enfocarse en una enseñanza adaptativa, es decir, una enseñanza que dependa del avance en el aprendizaje de cada estudiante en el dominio en cuestión. Al hablar del dominio en la aplicación de los mapas cognitivos difusos en la educación, se refiere a los temas de un área en específico que pueden ser enseñados. Chrysafiadi y Virvou (2013) mencionan que la representación del conocimiento del dominio es la base para la representación del conocimiento del aprendiz, que se realiza generalmente como un subconjunto del conocimiento del dominio. Sin embargo, la representación del conocimiento del estudiante es un objetivo móvil. El nivel de conocimiento del estudiante de un concepto de dominio generalmente se ve afectado por su nivel de conocimiento de otros conceptos del dominio relacionados (Chrysafiadi y Virvou, 2013). Por lo tanto, las dependencias de conocimiento que existen entre los conceptos de dominio del material de enseñanza - aprendizaje, así como su "fuerza de impacto" de uno sobre otro tienen que ser representados. Dicha representación del conocimiento puede ser modelada por un sistema dinámico, que en este caso son los MCD. De hecho, para que la representación de las dependencias del conocimiento sea llevada a cabo de manera manual por los docentes, requiere de un arduo trabajo sistemático difícil de realizar en el tiempo que los docentes tienen asignados a cada una de sus asignaturas, por lo que implementar y automatizar estos procesos dentro del módulo del dominio del STC pueden ser una herramienta de mucho apoyo para los docentes en la enseñanza no tan solo del álgebra, sino de las matemáticas y de algunas otras áreas relacionadas con la resolución de problemas, para su aprendizaje.

Cuando se trabaja con la dependencia causal entre los niveles de conocimiento que posee un alumno en un dominio particular, puede surgir una situación en la que el aumento en el concepto de cualquiera de los nodos del mapa cognitivo difuso no sea total, como se representa en las ecuaciones 7 y 8. Debido a esto, se debe usar un modelo que ayude a determinar la causalidad entre los nodos en función de la dependencia del dominio de conocimiento del material de aprendizaje. Chrysafiadi y Virvou (2013) definen dicho modelo como una tupla (C, W, KL, f) , donde :

1. $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ es el conjunto de conceptos del conocimiento del dominio.
2. $W: (C_i, C_j) \rightarrow w_{ij}$ es una matriz de conexión, donde w_{ij} es un peso del arco dirigido de C_i a C_j , que denota que el nivel de conocimiento del concepto C_i afecta al del concepto C_j .
3. KL es una función que en cada concepto C_i asocia la secuencia de su grado de activación. En otras palabras, $KL_i(t)$ indica el valor del nivel de conocimiento de un concepto en el momento t .
4. f es una función de transformación. Para la definición de la función de transformación, se debe tener en cuenta la siguiente limitación: el nivel de conocimiento de un concepto de dominio se ve afectado, cada vez, solo por el nivel de conocimiento del concepto leído (o aprendido) más recientemente. La razón de esto es el hecho de que el nivel de conocimiento del alumno se ve afectado por el nuevo conocimiento que ha obtenido, o por el conocimiento que cada vez ha olvidado. En consecuencia, el valor de KL de un concepto se ve afectado únicamente por el valor de KL del concepto de lectura más reciente, con respecto al peso del arco dirigido que los conecta. Por lo tanto, la función de transformación para un MCD, que se utiliza para representar el conocimiento de dominio del material de aprendizaje, se define como:

$$KL_i(t+1) = f(KL_i(t) \pm w_{ji} * p_j * KL_i(t) / 100), \text{ Ecuación 11}$$

donde p_j es el porcentaje de la diferencia en el valor del nivel de conocimiento del concepto leído más recientemente C_j , con $p_i = (KL_j(t+1) - KL_j(t)) * 100 / KL_j(t)$. Además, el + se usa en caso de aumento y el - se usa en caso de disminución.

3.2.16 Disertación de las teorías de Tutores Inteligentes y Lógica Difusa

Los STI y la lógica difusa son dos teorías que están estrechamente relacionadas, ya que, al hablar de Sistemas Tutoriales Inteligentes, se refiere a herramientas digitales con la capacidad de simular la inteligencia humana, a través de la toma de decisiones. Por lo tanto, para que un sistema Tutorial Inteligente pueda tener esa característica se debe integrar un modelo que pueda ayudar en la toma de decisiones. La parte inteligente dentro de un tutorial cognitivo, se puede implementar en diversas partes de su arquitectura, por ejemplo, en el módulo tutor, en el cual las actividades están relacionadas con la forma de presentar el material de instrucción, la parte inteligente puede simular la toma de decisiones de un experto pedagógico mediante la implementación de sistemas de inferencia difusa. Otro de los módulos que pueden integrar un modelo inteligente es el del dominio, mediante la implementación mapas cognitivos difusos o un sistema de inferencia difusa que ayude a determinar los tipos de problemas que se le deben ir presentando al alumno, de acuerdo a su nivel de desempeño cognitivo, esto último se puede hacer en conjunto con el módulo de autoría, en el que se pueden implementar actividades personalizadas para el estudiante, dependiendo de diversas características como son: su desempeño, su estado de ánimo, sus estilos de aprendizaje, lo cual puede ser controlado también por el módulo del estudiante, a través de modelos inteligentes basados en la determinación de las emociones mediante sistemas basados en las capturas de los gestos del rostro. Aunque son muchas las opciones de implementar la inteligencia en un sistema tutorial, abarcar todas en un solo proyecto de tesis es muy ambicioso, por lo tanto, se debe ir poco a poco de manera gradual. En principio, en este proyecto de tesis, se consideró la

integración de sistemas de inferencia difusos tanto en el módulo tutor y en el módulo dominio y mapas cognitivos difusos en el módulo dominio.

3.2.17 Conclusiones del marco teórico

El proponer un diseño instruccional para la enseñanza-aprendizaje es una tarea que conlleva el análisis de diversas teorías pedagógicas, y más aún si ese diseño instruccional requiere de automatización, entonces también deben ser analizados modelos y teorías del área de la computación. Sin embargo, siempre existe el riesgo de que lo que se proponga no resulte como se esperaba. El trabajo de investigación que se ha llevado a cabo para definir las teorías que estamos considerando, no ha sido fácil, pero independientemente de los resultados que se obtengan podemos decir que el aprendizaje es muy enriquecedor y significativo. Obviamente siempre se espera que lo que se propone para disminuir la brecha entre la situación real y la situación deseada en el problema planteado funcione y sea muy significativo, sin embargo, no siempre es así, pero puede quedar una aportación por mínima que sea. En lo que respecta a las teorías y conceptos que se han analizado en este capítulo se puede concluir que al tomar partes de cada teoría se puede proponer un buen diseño instruccional para la enseñanza del álgebra, al cual se le pueden ir agregando otros conceptos, modelos o herramientas que pueden ayudar a hacerlo más eficientes y más aún, se puede ir ampliando el área de aplicación, primero para otras áreas de las matemáticas y después para otras disciplinas, de tal manera que al final se pueda llegar a proponer y automatizar un sistema tutorial inteligente más genérico.

CAPÍTULO 4. METODOLOGÍA

El proceso de la metodología de investigación relacionada con el presente proyecto de tesis, se puede clasificar en nueve fases, las cuales se muestran en el Esquema 14, en el que se describe, mediante un diagrama de flujo, los actores que participan en cada una de las actividades de la metodología, que en su mayoría son realizadas por el investigador, sin embargo, también es determinante la participación de los alumnos que apoyaron en el experimento de campo, y de la misma forma, aunque no es mucha la participación de expertos, es una contribución muy importante y clave para la construcción de los mapas cognitivos difusos. En las siguientes secciones se describe, primero, las características de la población con la que se han realizado los experimentos de campo, y posteriormente se detallan las actividades que se llevaron a cabo en cada una de las fases de la metodología descrita en el Esquema 14, describiendo la forma en cómo se llevó a cabo todo el proceso para obtener los resultados requeridos en cada una de las etapas.

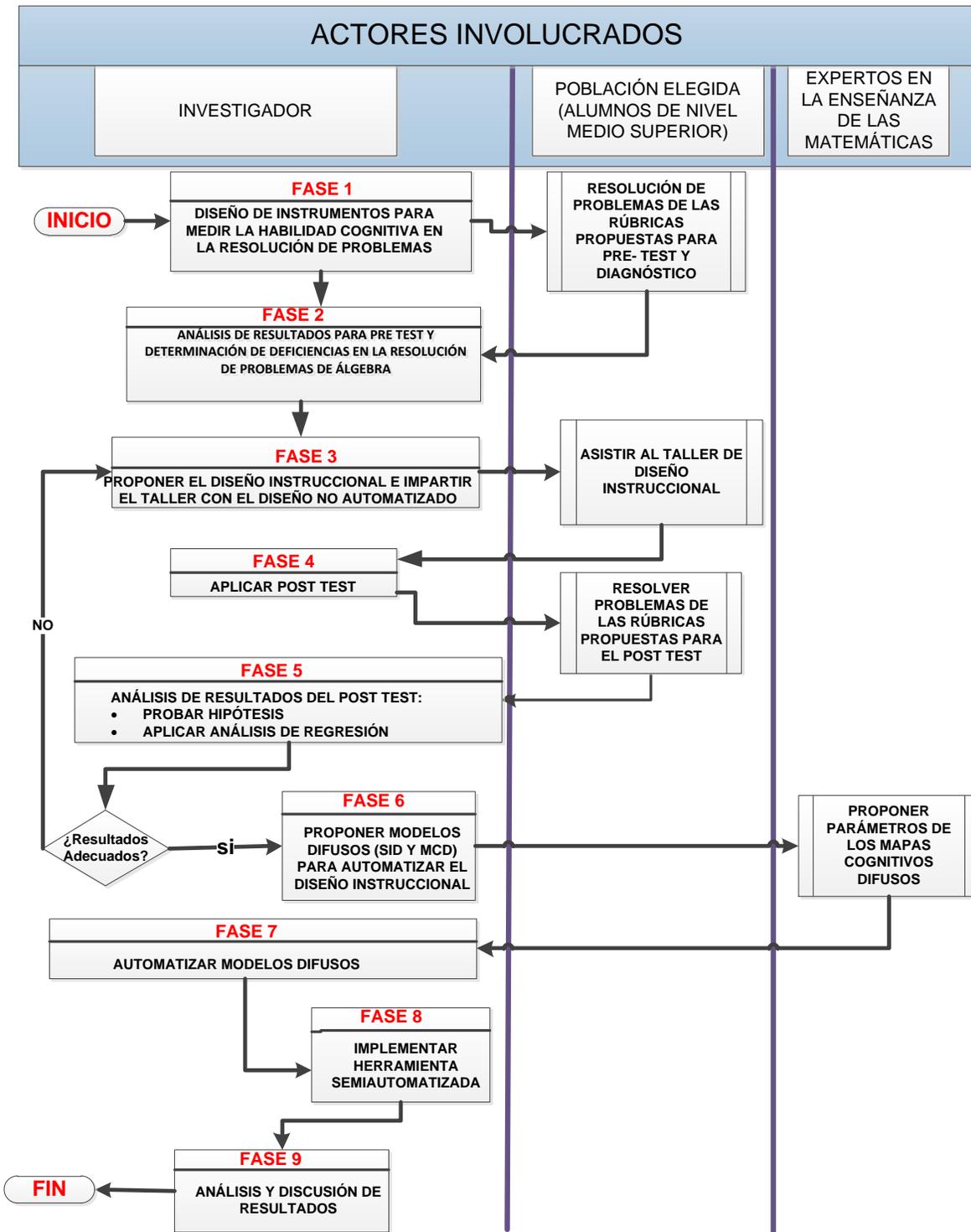
4.1 Descripción de la población

Universo

El universo del experimento son todos los alumnos de nivel bachillerato, tanto de escuelas públicas como privadas de la República Mexicana.

Población

El objetivo del trabajo de campo es verificar de qué manera un diseño instruccional basado en la resolución de problemas de álgebra, aplicando los efectos “expertise reversal”, “worked examples” de la Teoría de la Carga Cognitiva modelos de mapas cognitivos difusos, combinados con estrategias de gamificación e interfaces tangibles puede ayudar a los estudiantes a comprender mejor el álgebra.



Esquema 14. Descripción de la metodología utilizada durante el proyecto de investigación, incluyendo la forma en que los actores participan en cada una de las etapas del proceso metodológico. Fuente: Diseño propio.

El trabajo de campo se llevó a cabo en el Colegio de Estudios Científicos y Tecnológicos (CECyTE) del estado de Tlaxcala, el cual es una institución de Educación Media Superior Pública. Por lo tanto, definimos la población como los alumnos de nivel bachillerato de los Centros de Estudios Científicos y Tecnológicos (CECyTE), del estado de Tlaxcala. El CECyTE es un sistema de educación pública a nivel nacional, los cuales en 1991 surgen como organismos públicos descentralizados de los estados, con personalidad jurídica y patrimonios propios, vinculados con el sector social productivo de cada uno de los estados².

En el estado de Tlaxcala, el sistema abarca 32 planteles educativos ubicados en diferentes municipios. El primer plantel se creó el 30 de septiembre de 1992 y actualmente, el sistema de CECyTEs cuenta con un total de 56 planteles en diferentes municipios del estado³.

La misión de los CECyTEs del estado de Tlaxcala es: “Impartir estudios de bachillerato tecnológico bajo un modelo educativo integral certificado basado en competencias y valores que permita a los estudiantes incorporarse a la planta productiva como técnicos profesionales para satisfacer las necesidades del mercado laboral, desarrollar microempresas y/o continuar sus estudios de nivel superior.” Y su objetivo estratégico es: “Impartir Educación Media Superior Tecnológica, en el ámbito del territorio estatal, ofreciendo servicios de calidad académica que garantice la formación de técnicos profesionales competentes que respondan a las necesidades regionales del sector productivo y social, encausando sus programas a la preparación tecnológica especializada, con una sólida formación académica, axiológica y disciplina participativa de los estudiantes.”⁴

Específicamente, los CECyTEs con los que se ha trabajado son el plantel 08, ubicado en el municipio de Apetatitlán, y el plantel 07 ubicado en la localidad de Tzompantepec. Las carreras que se imparten en este plantel son Electricidad y

² <http://www.cecYTE.edu.mx/>

³ http://www.cecylax.edu.mx/?page_id=13

⁴ http://www.cecylax.edu.mx/?page_id=15

Laboratorista Químico. Por su parte, el plantel 07 se encuentra ubicado en la localidad de Ahuashuatepec del municipio de Tzompantepec.

4.2 Primera Y Segunda Fase: Diseño y aplicación de Instrumentos

En lo que se refiere a la parte de la metodología que se está adaptando para el desarrollo de la tesis, se trabajó con un enfoque cuantitativo, debido a que uno de los objetivos del proyecto es medir la habilidad cognitiva de los alumnos en la resolución de problemas de álgebra. Por tal motivo se propuso aplicar un modelo analítico, que a través de rúbricas basadas en la Taxonomía de Bloom, se pudiera obtener una valoración cuantitativa y generalizarla a través de un modelo de lógica difusa, para poder obtener un valor que nos proporcione información de la habilidad cognitiva de los alumnos, ya que mediante este valor, se determina el tipo de diseño instruccional, basado en el enfoque de “worked examples” aplicado a la resolución de problemas de álgebra, que el tutor cognitivo le estará proporcionando al estudiante.

Después de una revisión de la literatura relacionada con el manejo de instrumentos para medir las habilidades en la resolución de problemas de álgebra, se optó por utilizar un enfoque de la enseñanza del álgebra conocido en la literatura como modelo 3UV (3 usos de la variable), debido a que es un enfoque que se centra mucho en la resolución de problemas de álgebra de una forma un tanto sistematizada. El modelo 3UV se ha utilizado en diversos experimentos relacionados con la enseñanza del álgebra y fue propuesto como parte de una tesis doctoral (Legovich, 1993), por lo que en la investigación que se reporta en este documento, no se considera necesaria la validación del instrumento, debido a que ya fue publicado, solo se utiliza.

Tomando como base el modelo 3UV se diseñan rúbricas que se relacionan con la Taxonomía de Bloom (en el apéndice 1, se muestran algunos ejemplos de las rúbricas), se evalúan con el modelo analítico descrito en la sección 3.2.3, para

posteriormente aplicarles un modelo difuso para la clasificación de los alumnos en base a su habilidad cognitiva para resolver problemas de álgebra. El instrumento estuvo compuesto por seis problemas, dos de cada tipo del modelo 3UV (dos problemas de manejo de incógnita, dos de número general y dos de función).

Una vez definidos los instrumentos de medición, las actividades de la primera fase, consistieron en realizar pilotajes para determinar cuáles eran los tipos de problemas en los que los alumnos tenían más deficiencias. Para los pilotajes realizados, se consideraron muestras de la misma población, pero en cada caso, los criterios del muestreo variaron un poco, en base a las circunstancias. En las siguientes dos secciones, se describen los dos pilotajes realizados.

4.2.1 Muestra del primer pilotaje de la primera fase

Para el primer pilotaje, la muestra estuvo compuesta por estudiantes de segundo y cuarto semestre del plantel 07 ubicado en la comunidad Ahuashuatepec, del municipio de Tzompantepec, del estado de Tlaxcala del sistema CECyTE, es decir, alumnos entre 15 y 18 años de edad. Se obtuvo una muestra no aleatoria de 57 alumnos, 24 mujeres y 33 hombres, por lo tanto, fue una muestra no estratificada y por conveniencia, ya que eran los alumnos a los que en ese momento se tenía facilidad de acceso. El pilotaje se realizó en el mes de junio del 2016, es decir, al final del semestre, cuando los alumnos estaban terminando, segundo y cuarto semestre, por lo que eran alumnos que ya habían cursado la materia de álgebra, durante el primer semestre. El objetivo de este pilotaje fue identificar en cuál de las tres partes del uso de la variable del modelo 3UV, los alumnos tienen mayores problemas en la resolución de problemas de álgebra. Los resultados fueron evaluados con promedios estadísticos sencillos, obteniendo como resultados preliminares la conclusión de que los alumnos presentan mayor deficiencia en problemas relacionados con el manejo de incógnitas.

Los criterios de inclusión, exclusión y eliminación fueron:

Criterios de inclusión. - Alumnos de segundo y cuarto 4 semestre que hayan reprobado la materia de matemáticas.

Criterios de exclusión. - Alumnos de segundo y cuarto semestre que no hayan reprobado la materia de matemáticas.

Criterios de eliminación. - Alumnos que no se presentaron a la prueba diagnóstico.

4.2.2 Muestra del segundo pilotaje de la primera fase

Para el segundo pilotaje de la primera fase se trabajó con 393 estudiantes de 10 grupos del plantel 08 del sistema de CECyTE, ubicado en el municipio de Apetatitlán del estado de Tlaxcala. AL momento de realizar el pilotaje, los estudiantes estaban cursando el segundo semestre y su edad oscilaba entre 15 y 16 años. En la Tabla 11 se muestran los totales de alumnos de cada uno de los grupos que participaron en el segundo pilotaje, así como la cantidad de hombres y mujeres. Es importante mencionar que estos alumnos ya habían cursado la materia de álgebra en el primer semestre del bachillerato, el cual cursaron en el periodo de agosto a diciembre del 2016 y el pilotaje se realizó en el mes de febrero del 2017. El segundo pilotaje también fue utilizado para realizar la prueba de hipótesis de la fase 5, ya que se tuvo la oportunidad de seguir trabajando con los alumnos del plantel 08, durante los meses de febrero a mayo del 2017, a diferencia de los alumnos del primer pilotaje, con los que solamente se trabajó durante dos semanas en el mes de junio del 2016.

Para el experimento, se diseñaron 5 exámenes diferentes, aunque con las mismas características, es decir, los problemas, en contenido, eran diferentes, pero se referían a los tres usos de la variable, y se trató que los reactivos midieran lo mismo, por lo que se aplicó una prueba de correlación de Pearson para determinar la relación entre los diferentes instrumentos. La decisión de diseñar 5 exámenes diferentes se debió en principio, a que las pruebas fueron aplicadas de manera manual (con exámenes escritos) y en seguida, al hecho de que los grupos

son numerosos (entre 34 y 47 alumnos), lo que origina que la distancia entre las butacas de los alumnos es muy corta, facilitando la situación de que los alumnos puedan ver las respuestas de su compañero, por lo que se trató de que los exámenes entre los alumnos que estaban sentados muy cerca, fueran diferentes.

Tabla 11. Alumnos a los que se les aplicó el segundo pilotaje, clasificados por grupo y por sexo.

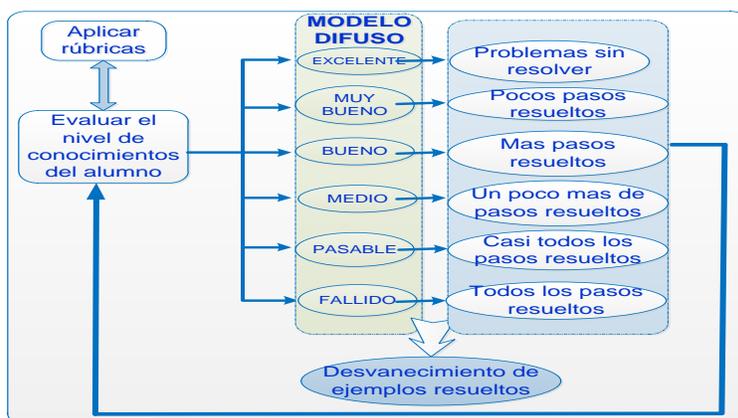
GRUPO	TOTAL DE ALUMNOS	TOTAL DE MUJERES	TOTAL DE HOMBRES
1	44	32	12
2	47	41	6
3	40	31	9
4	35	3	32
5	43	26	17
6	41	33	8
7	37	6	31
8	35	31	4
9	34	5	29
10	37	10	27
TOTALES	393	218	175

Fuente: Diseño propio

La segunda fase consistió del análisis de los resultados de la aplicación de los instrumentos propuestos en la primera fase, con el fin de determinar en qué temas, relacionados con el uso de la variable, los alumnos tienen más deficiencias en la resolución de problemas, esto con el fin de definir, los temas que se incluirían en el taller del diseño instruccional de la tercera fase.

4.3 Tercera Fase: Diseño Instruccional e impartición del taller

De manera general se puede decir que el procedimiento que se siguió en el proyecto de investigación, consistió en diseñar estrategias que ayuden a identificar las habilidades cognitivas del estudiante en la resolución de problemas de un tema de álgebra para determinar el diseño instruccional basado en diversos tipos de ejemplos o problemas. Este procedimiento se puede ver como un proceso iterativo como el que se muestra en el Esquema 15 que finaliza en cuanto el alumno pueda resolver por sí solo los problemas de un cierto tema. El proceso de identificar las habilidades cognitivas del alumno no es sencillo, ya que se puede caer en la subjetividad, por lo que se debe utilizar una estrategia, lo más objetiva que sea posible.



Esquema 15. Descripción general del diseño instruccional. Fuente: Diseño propio.

Siguiendo el proceso iterativo, el primer reto en el proyecto de investigación, es como obtener una evaluación cuantitativa (debido a la necesidad de poder automatizar la evaluación) de la habilidad cognitiva en la resolución de problemas de álgebra. Motivo por el cual se tuvo que investigar sobre instrumentos que evaluaran dicha habilidad, sin embargo, como no se encontraron instrumentos a la medida, se optó por asociar las rúbricas descritas en la primera fase, utilizando la taxonomía de Bloom y para evaluarlas se utilizó el modelo analítico que se

describe en la sección 3.2.9 , y posteriormente se aplicó un modelo difuso para obtener una clasificación más específica de las habilidades cognitivas del alumno.

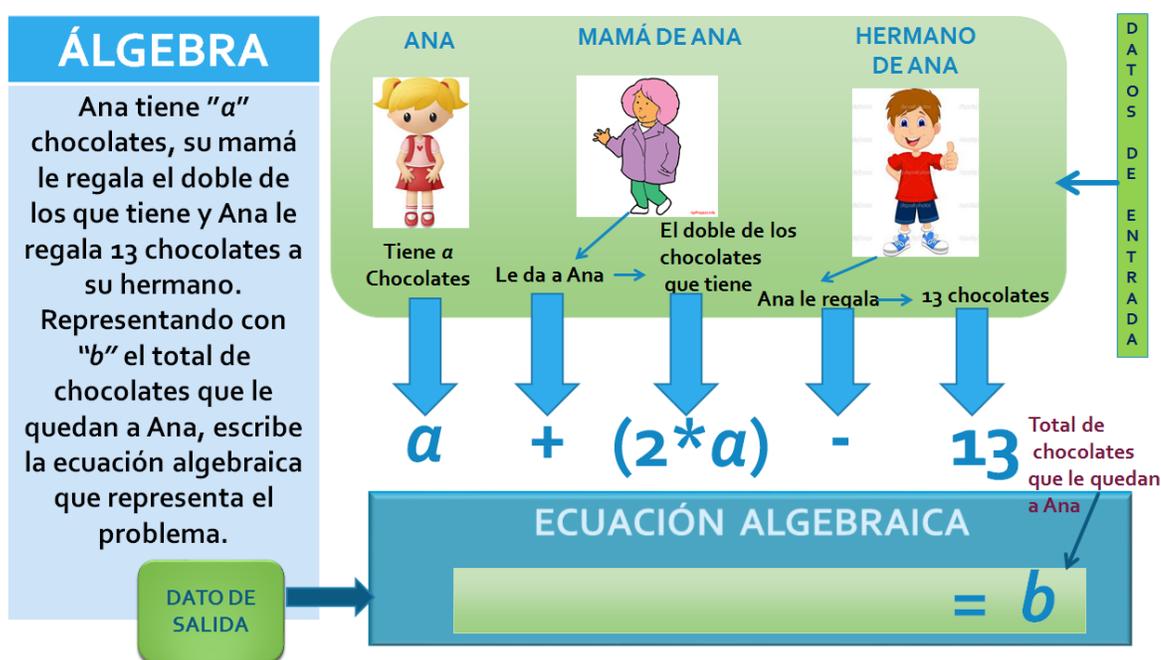
Una de las metas primordiales de la investigación, que quizá se logre más a futuro, es tener todo el proceso del diseño instruccional totalmente automatizado, lo cual conlleva diversos experimentos que se tienen que ir realizando por etapas, y como comúnmente ocurre con los procesos que requieren automatización, es viable primero probarlos, en la medida de lo posible, de manera manual. En este caso, las actividades con las que se trabajaron en el taller que se consideró como parte de la prueba de hipótesis, fueron las siguientes:

- Diseño y aplicación de rúbricas (pre test)
- Evaluación de rúbricas
- Trabajar con material interactivo y juegos manuales tipo memorama
- Aplicación de rúbricas (post test)
- Evaluación de rúbricas

Las actividades de aplicación y evaluación de rúbricas se llevó a cabo de manera manual, y para la impartición del taller se usó material didáctico con animaciones en diapositivas, como el que se muestra en el Esquema 16. La dinámica del taller consistió en combinar explicaciones a través del material animado y para reforzar el aprendizaje, se usaban los juegos (Esquema 17). Todo el material tenía que ver con el manejo de la variable como incógnita, por lo que los juegos tipo memoramas estaban diseñados de tal manera que los alumnos tenían que asociar una expresión algebraica, con su correspondiente descripción en lenguaje natural, como la que se muestra en el Esquema 18. Otro de los juegos de tipo memorama, consistían en asociar un problema algebraico con su correspondiente expresión algebraica (Esquema 19). Dentro del taller también se implementaron las estrategias de la gamificación, ya que se proponían retos basados en problemas, y para motivar a los alumnos se diseñó un tablero manual como el que se muestra en el Esquema 20 con insignias de tres colores, que fueron realizadas por los mismo alumnos. Los colores de las insignias fueron rojas, amarillas y blancas, considerando que las de mayor valor eran las rojas. Las

reglas en el manejo de los retos y la asignación de insignias se definieron de la siguiente manera: por cada tres insignias blancas se les asignaba una amarilla, por cada tres amarillas se les asignaba una roja y quienes obtuvieran tres insignias rojas, obtenían la máxima calificación.

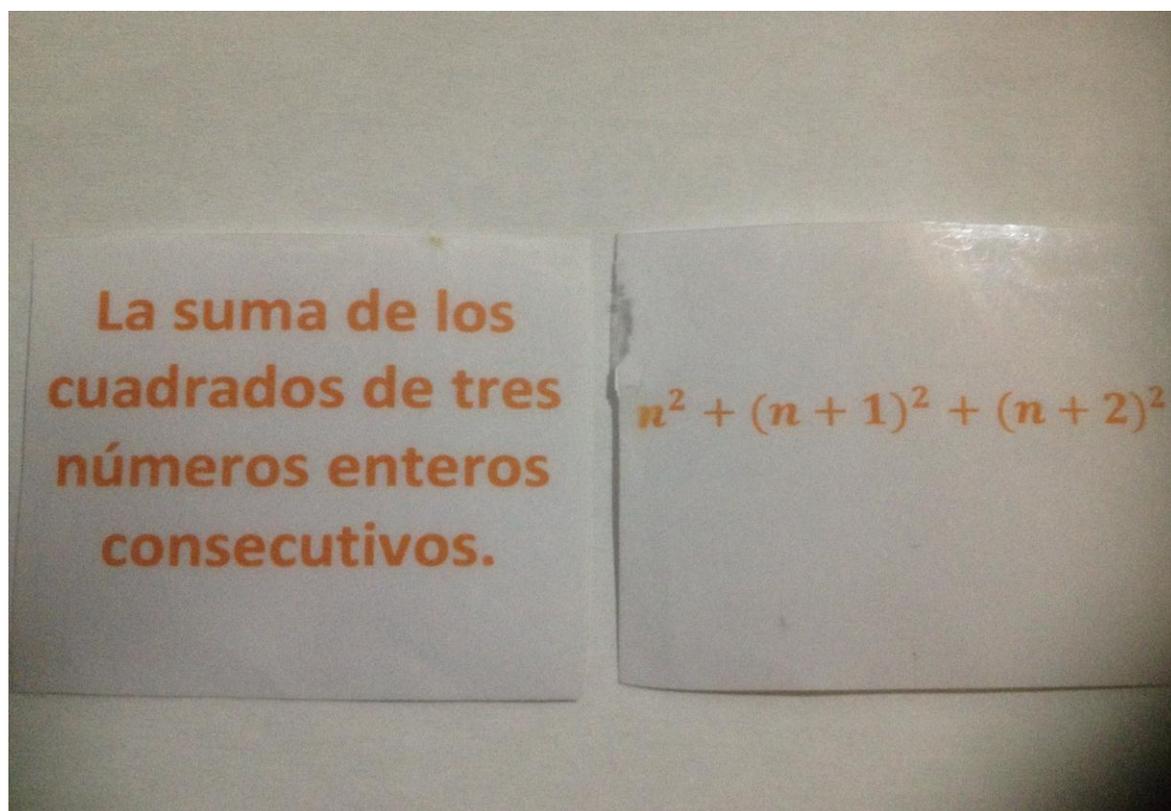
Es importante mencionar que no se tuvo una asistencia constante por parte de todos los alumnos, ya que la asistencia, no era obligatoria, sin embargo, se pudo observar que el hecho de trabajar con los juegos, manejar las insignias y los retos, era algo que tenía activos a la mayoría de los alumnos.



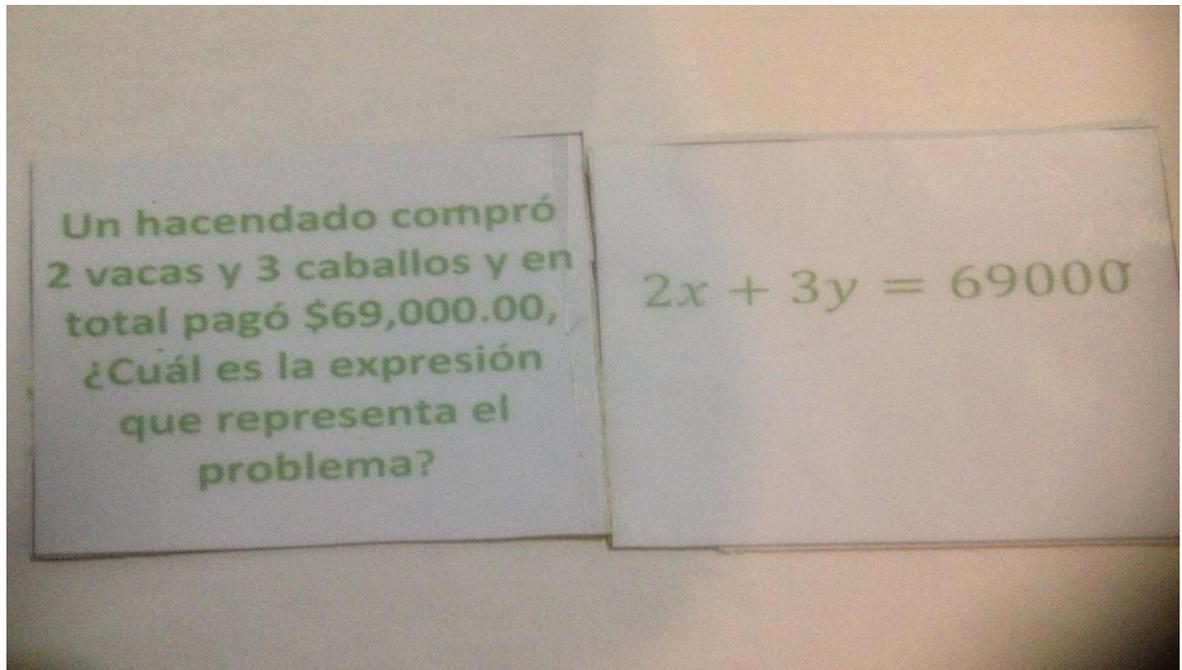
Esquema 16. Material didáctico animado para la enseñanza de la resolución de problemas de álgebra.



Esquema 17. Alumnos jugando con el memorama, en el taller que se impartió.



Esquema 18. Memorama para asociar expresiones algebraicas con su correspondiente descripción lingüística



Esquema 19. Memorama para asociar un problema con su correspondiente expresión algebraica



Esquema 20. Manejo de un tablero gamificado, con insignias, diseñado con material físico.

4.4 Cuarta y Quinta Fase: Aplicación del Post Test

Después de aplicar el pre test, a los 393 alumnos del segundo pilotaje, se seleccionaron 120 alumnos, los que obtuvieron las calificaciones más bajas, para impartirles el taller con el diseño instruccional basado en el manejo de material interactivo y juegos relacionados con los temas del uso de la variable como

incógnita. Sin embargo, los alumnos que estuvieron más constantes en su asistencia al taller fueron alrededor de 40, pero al final solo llegaron 19 a la aplicación del post test. Por lo tanto, la muestra con la que se aplicó la prueba de hipótesis fue de tamaño 19. Se aplicó una prueba de hipótesis con T de Student con muestras relacionadas por conveniencia y se aplicó una prueba de normalidad de Shapiro Wilk, ya que la muestra es menor de 30.

Los pasos que se siguieron en el manejo de la prueba de hipótesis fueron los siguientes:

PASO 1. Especificar las hipótesis.

H0: No existen cambios en el antes y el después del diseño instruccional.

H1: Si hay diferencias entre el antes y el después del diseño instruccional.

En este caso, se elige la media como el estadístico a comparar, por lo tanto las hipótesis quedan como: $H_0: \mu_1 = \mu_2$; $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

PASO 2. Nivel de significancia.

Se consideró un intervalo de confianza del 95%, por lo tanto el nivel de significancia es: $\alpha = 0.05$

PASO 3. Obtener el valor del estadístico para la muestra elegida

PASO 4. Decidir si se rechaza o no la hipótesis nula.

Los resultados de los pasos 3 y 4 se muestran en la sección 5.2.3.

4.5 Sexta y Séptima Fase: Propuesta y automatización de los Modelos de Sistemas Difusos

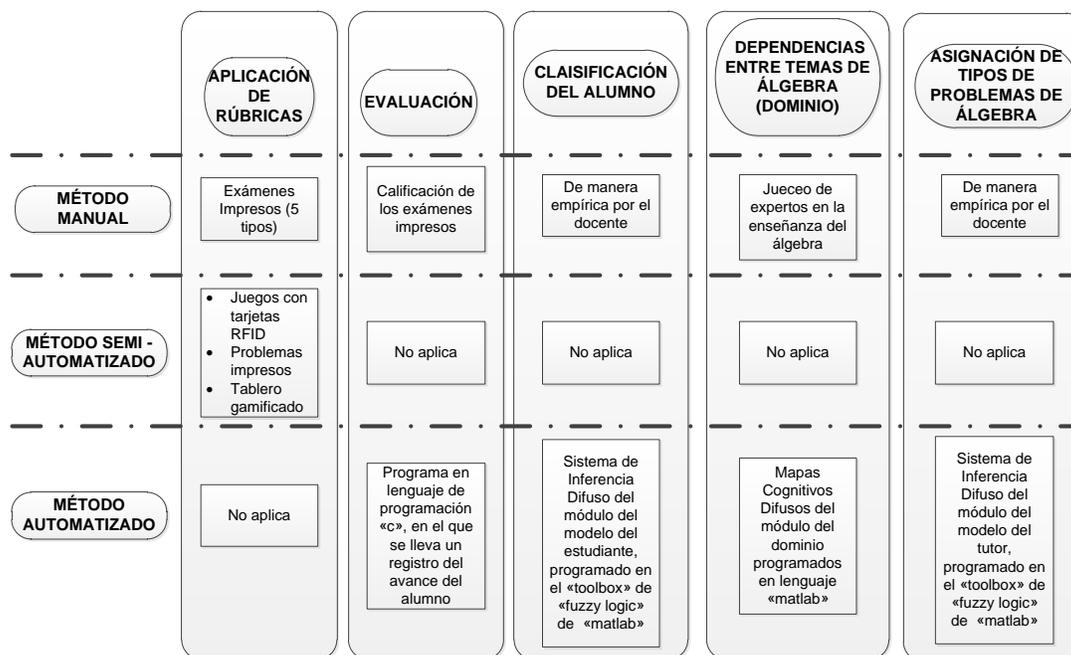
Inicialmente, algunas de las actividades del diseño instruccional mostrado en el Esquema 15, se realizaron de manera manual, esto con el fin de poder

llevar a cabo el experimento descrito en la fase 3 del Esquema 14 y hacer la prueba de hipótesis descrita en la sección 4.4, sin embargo, el principal objetivo de la investigación fue identificar la viabilidad de automatizar o semi – automatizar cada uno de los procesos del diseño instruccional para poder implementarlo en el Tutor Cognitivo. En el Esquema 21 se muestran los procesos que se llevaron a cabo de manera manual, los que se pudieron automatizar y los que requieren tanto de procesos manuales y automatizados (a estos los llamamos semi – automatizados). En las columnas del Esquema 21 se describen los procesos del diseño instruccional propuesto y en los renglones los procesos que se realizaron de manera manual inicialmente y posteriormente fueron automatizados o semi – automatizados.

Parte de la automatización del diseño instruccional requiere de modelos inteligentes que simulen la toma de decisiones, dichos modelos forman parte de tres de los módulos del Sistema Tutor Cognitivo, objetivo principal del presente proyecto de investigación, el módulo del modelo del estudiante, el módulo del modelo del tutor y el módulo del dominio. De alguna manera, estos tres módulos deben estar constantemente relacionados, dentro del tutor cognitivo y la relación la podemos visualizar mediante el Esquema 22, en el cual, cada uno de los modelos forman parte de un proceso, además de ser un proceso iterativo, es la forma en la que se está automatizando el diseño instruccional del Esquema 15.

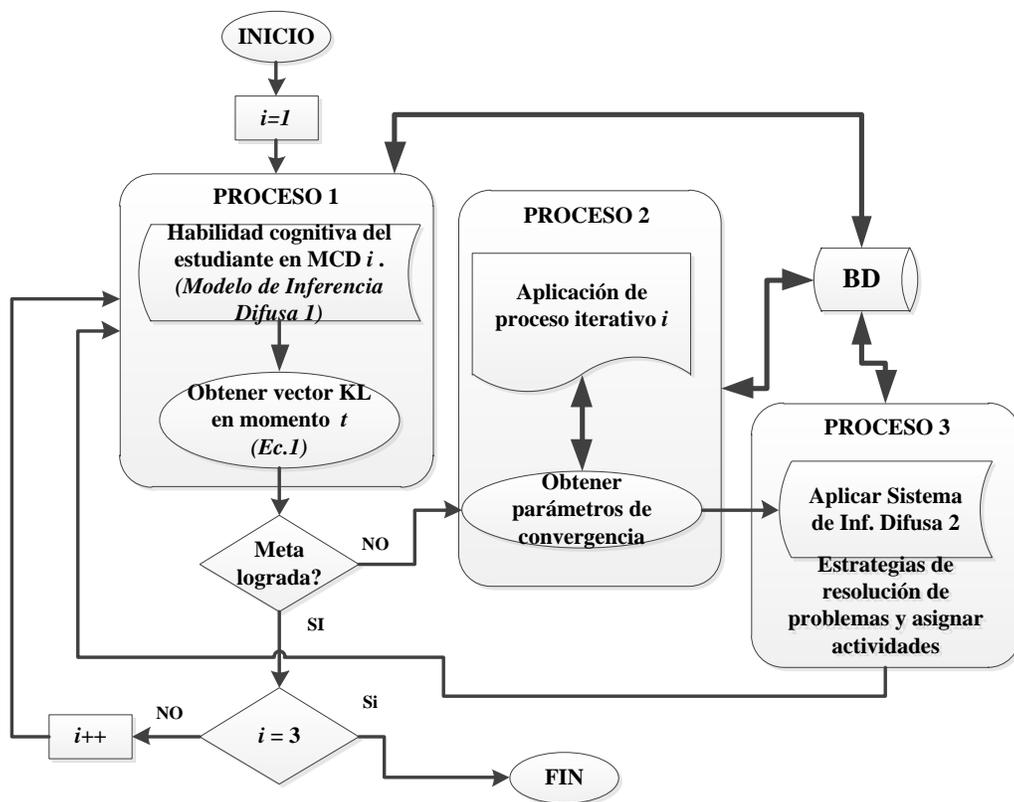
El primer modelo es un Sistema de Inferencia Difuso (SID), que es parte del módulo del modelo del estudiante (3ª. Columna del Esquema 21 y proceso 1 del Esquema 22), ya que es el que se encarga de evaluar y clasificar al estudiante, en base a su habilidad cognitiva para resolver problemas de álgebra. El segundo es un modelo de mapas cognitivos difusos (4ª. Columna del Esquema 21 y proceso 2 del Esquema 22) que tiene por objetivo, identificar las relaciones entre los conceptos del dominio, que en este caso es el álgebra, para determinar su relación con el avance en la habilidad cognitiva de los alumnos y en base a ello, obtener los parámetros de entrada para el segundo SID, el cual es parte del módulo del tutor (5ª. Columna del Esquema 21 y proceso 3 del Esquema 22) y se

encarga de determinar los tipos de problemas que se le deben ir presentando al alumno, para ayudarlo a mejorar su habilidad en la resolución de problemas.



Esquema 21. Clasificación y descripción de los procesos del diseño instruccional. Fuente: Diseño propio.

La relación entre los tres procesos da lugar a un proceso iterativo que relaciona constantemente los resultados de cada proceso y se controla mediante un contador, ya que estos procesos se deben realizar mientras la evaluación cognitiva no alcance valores adecuados y para cada uno de los mapas cognitivos difusos definidos, los cuales son tres, de ahí que el contador i sirve para controlar el proceso de evaluación en cada uno de los mapas cognitivos. En las siguientes secciones se describe con detalle cada uno de los modelos de cada uno de los tres procesos.

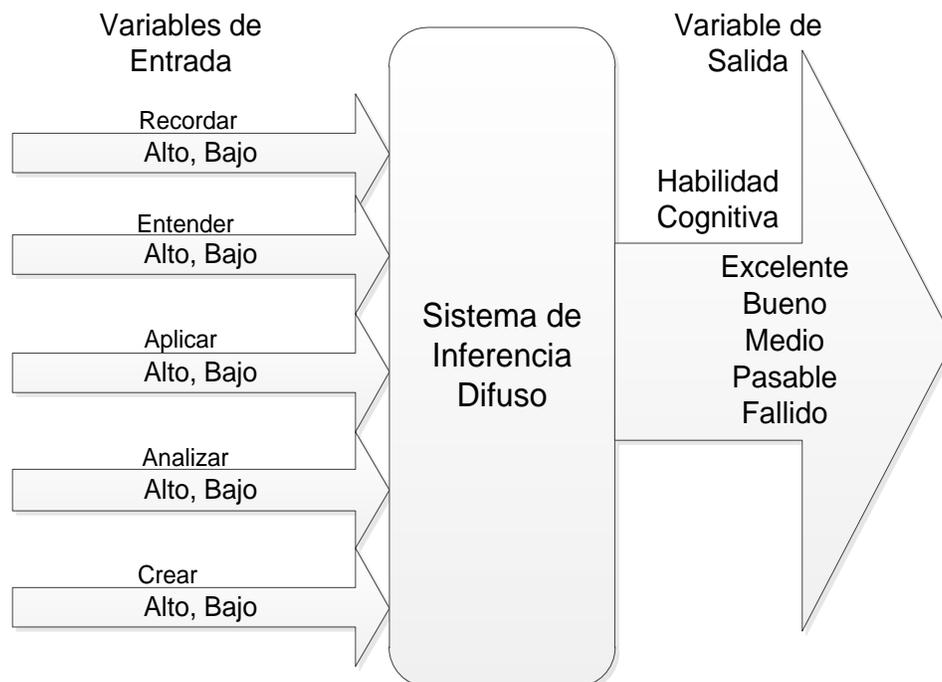


Esquema 22. Proceso iterativo para automatizar el diseño instruccional, a través de sistemas difusos. Fuente: Diseño propio

4.5.1 Sistema de inferencia difuso para el módulo del estudiante.

El primer sistema de inferencia difuso, está relacionado con el primer paso del diseño instruccional mostrado en el Esquema 15, el de la evaluación. El SID tiene por objetivo clasificar al alumno en base a su desempeño para resolver problemas de álgebra; el proceso de evaluación inicia con el manejo de rúbricas basadas en el modelo 3UV, las cuales son evaluadas a través de modelo analítico descrito en la sección 3.2.7, posteriormente, en base al modelo analítico se obtienen los parámetros de entrada para el modelo difuso mostrado en el Esquema 23, el cual es un sistema de inferencia difuso de tipo Mamdani que maneja como parámetros de entrada los niveles de las Taxonomía de Bloom, y que a su vez, funcionan como los conjuntos difusos del SID y sus funciones de membresía junto con los

valores lingüísticos y parámetros asociados son los que se muestran en la Tabla 12. Inicialmente se manejaron estos valores, pero son valores y funciones que pueden adaptarse en base a las observaciones y datos que se vayan obteniendo de los diversos experimentos que se realicen, una vez que se puedan implementar y reproducir diversas copias de la herramienta digital semi – automatizada, propuesta en este proyecto, para que puedan ser utilizadas en clases presenciales de álgebra.



Esquema 23. Diagrama general de sistema de inferencia difuso del módulo del estudiante. Fuente: Diseño propio.

4.5.2 Mapas Cognitivos Difusos para el módulo del dominio

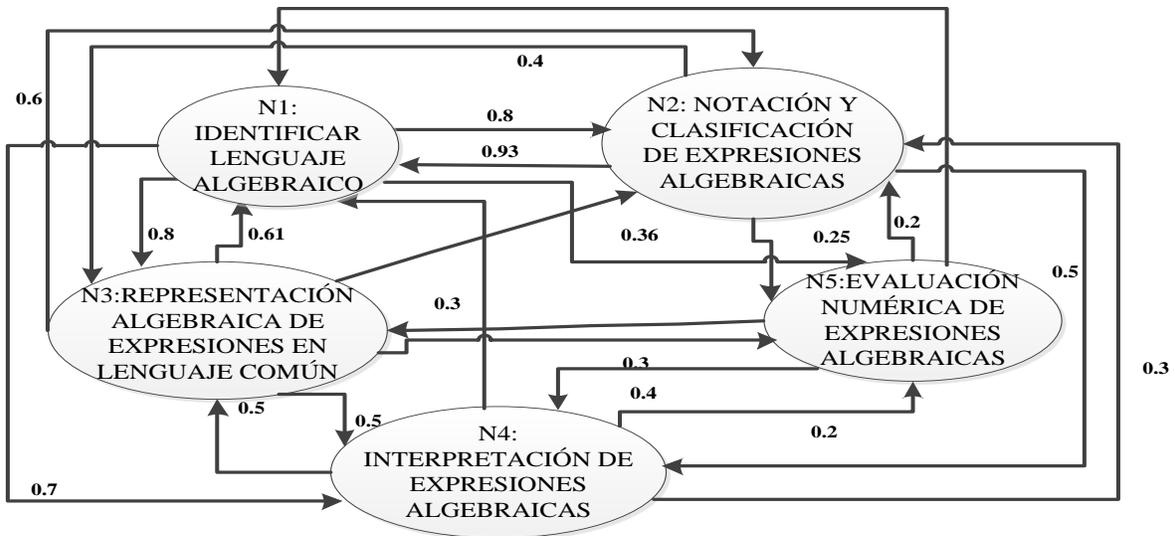
Concretamente, el módulo del dominio del tutor cognitivo que se diseñó, es el encargado de analizar las dependencias entre los temas que se están considerando como objetivo principal en el proceso de enseñanza – aprendizaje, en este caso estamos hablando de temas de álgebra. Tomando como base, el temario de la asignatura de álgebra del sistema de educación media superior

pública del subsistema de CECyTEs, se pudo observar que dicho temario está dividido en 3 unidades, por tal motivo, para el modelado de las dependencias entre los temas, se construyó un mapa cognitivo difuso para cada unidad (En el Esquema 24 se muestra el mapa de la unidad 1), y para obtener los valores asociados a cada uno de los arcos de cada MCD se aplicó un jueceo con 18 docentes de matemáticas de nivel medio superior, utilizando el formato de jueceo del Apéndice 1, posteriormente se aplicó la Ecuación 9 a los resultados del jueceo para obtener los valores de los arcos de los mapas cognitivos difusos. Finalmente se construyó la matriz de pesos general para el modelo, aplicando la Ecuación 10, la cual se muestra en el Esquema 25.

Tabla 12. Descripción de los elementos del modelo difuso

TIPO DE VARIABLE	VARIABLE LINGÜÍSTICA	RANGO	VALORES LINGÜÍSTICOS	FUNCIÓN DE PERTENENCIA	PARÁMETROS
VARIABLES DE ENTRADA	RECORDAR	[0,1]	Alto	TRAPEZOIDAL	[0.6627 0.782 1.1 1.9]
			Bajo		[-0.9 -0.1 0.5542 0.771]
	ENTENDER	[0,1]	Alto	TRAPEZOIDAL	[0.6071 0.726 1.01 1.01]
			Bajo		[0.00789 0.328 0.541 0.649]
	APLICAR	[0,1]	Alto	TRAPEZOIDAL	[0.586 0.901 1.007 1.02]
			Bajo		[-0.36 -0.04 0.446 0.7288]
	ANALIZAR	[0,1]	Alto	TRAPEZOIDAL	[0.5939 0.845 1.01 1.01]
			Bajo		[-0.36 -0.04 0.522 0.6521]
	EVALUAR	[0,1]	Alto	TRAPEZOIDAL	[0.5066 0.784 1.01 1.02]
			Bajo		[-0.34 0.137 0.3876 0.652]
	CREAR	[0,1]	Alto	TRAPEZOIDAL	[0.496 0.832 1.01 1.01]
			Bajo		[-0.357 -0.0374 0.422 0.544]
VARIABLE DE SALIDA	NIVEL COGNITIVO	[0,1]	Excelente	TRAPEZOIDAL	[0.901 0.975 1.02 1.23]
			Bueno		[0.671 0.725 0.874 0.922]
			Medio		[0.409 0.53 0.612 0.725]
			Pasable		[0.025 0.225 0.275 0.475]
			Fallido		[-0.225 -0.025 0.025 0.225]

Fuente: Diseño propio



Esquema 24. Mapa cognitivo difuso para los temas de álgebra de la unidad 1. Fuente: Diseño propio.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	0	0.76	0.81	0.72	0.3667	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0.93	0	0.59	0.46	0.2556	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0.61	0.36	0	0.53	0.3111	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0.55	0.29	0.51	0	0.1833	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0.31	0.24	0.28	0.41	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0.58	0.42	0.63	0.57	0.6353	0.47	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0.31	0	0.36	0.57	0.48	0.5706	0.64	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0.56	0.44	0	0.7	0.69	0.6647	0.59	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0.36	0.51	0.46	0	0.67	0.7235	0.71	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0.34	0.31	0.39	0.53	0	0.7647	0.6	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0.33	0.35	0.38	0.69	0.6	0	0.63	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0.31	0.49	0.41	0.65	0.32	0.3118	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.62	0.78	0.75	0.7294
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.55	0	0.79	0.76	0.7
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.55	0.58	0	0.76	0.4529
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.63	0.55	0.47	0	0.5765
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.53	0.52	0.41	0.44	0

Esquema 25. Matriz de pesos de cada uno de los mapas cognitivos difusos

4.6 Octava Fase: Implementación de la herramienta

Inicialmente, el objetivo del proyecto estaba enfocado en desarrollar una herramienta totalmente automatizada, mediante el manejo de interfaces amenas. Pero también, siempre se tuvo en mente que la herramienta pudiera ser utilizada como auxiliar didáctico del docente, en la materia de álgebra, lo cual implicaba que los alumnos pudieran tener disponibles las herramientas digitales necesarias, en

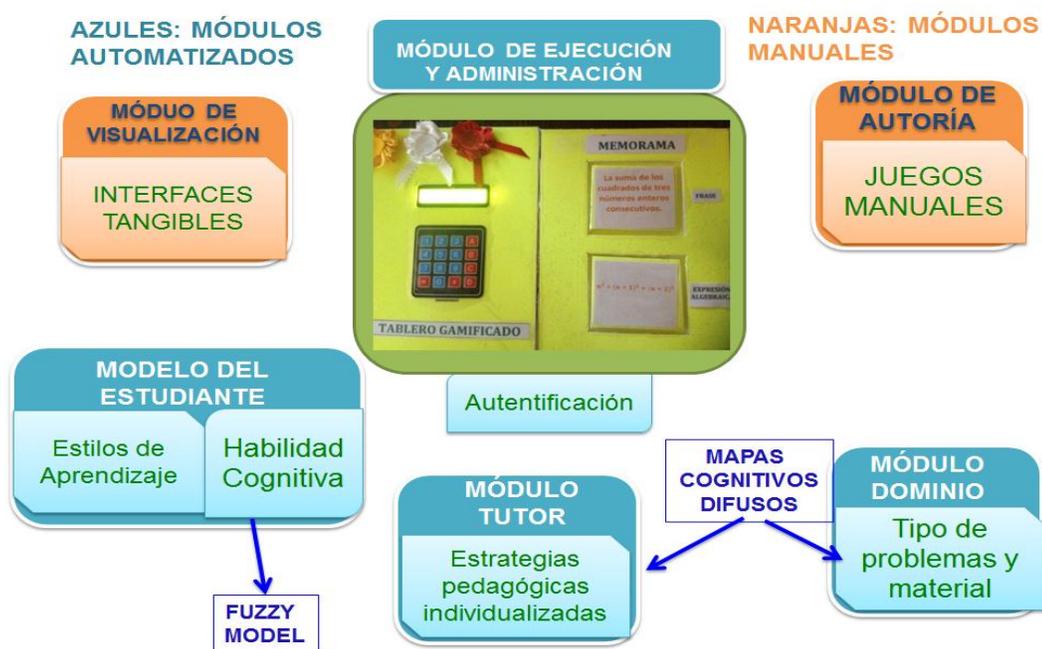
cada una de las clases, y más aún, que por lo menos hubiera una herramienta digital para máximo tres alumnos y, además, contar con acceso adecuado a internet, o en su caso, que en todos los dispositivos se pudiera instalar el software. Sin embargo, durante el proceso de desarrollo del proceso de investigación, se realizaron algunos pilotajes, mediante la aplicación de instrumentos basados en el modelo 3UV, para obtener los datos que se utilizaron para ir probando los modelos para detectar las habilidades cognitivas de los estudiantes, en instituciones de educación públicas de nivel bachillerato en el estado de Tlaxcala, México, los cuales permitieron definir las estrategias que se aplicarían para la implementación del tutor cognitivo. Mediante la asistencia a algunas instituciones se pudo visualizar las condiciones reales de las instituciones, las cuales, en algunos casos, tienen alrededor de 1500 alumnos por turno (matutino y vespertino) y por lo muchos cuentan con alrededor de 50 equipos de cómputo, los cuales solo pueden ser utilizados para las materias relacionadas con la computación.

Por otra parte, el acceso al internet por medio de herramientas digitales propias de los alumnos, está restringido. Debido a lo anterior se optó por trabajar en una herramienta semi-automatizada. Se considera semi – automatizada ya que se implementaron algunos procesos que fueron programados en lenguaje “c” y almacenados en una tarjeta electrónica, pero hay procesos que son implementados de manera manual. En el Esquema 26 se muestra un diagrama de la herramienta, en donde se indica qué módulos son automatizados y qué módulos son manuales y en las siguientes secciones se describe la implementación de los módulos automatizados y no automatizados.

4.6.1 Módulos automatizados

En lo que respecta a los módulos automatizados, el proceso que se lleva a cabo tiene que ver con el proceso iterativo descrito en el Esquema 22 en el que se está evaluando constantemente a los alumnos, ya que es precisamente la parte de la evaluación la que genera un trabajo arduo que muchas veces los docentes no pueden estar realizando muy frecuentemente, por falta de tiempo. El objetivo

es que con los datos que se vayan obteniendo de la evaluación, alimenten los modelos difusos, para que se obtengan resultados que indiquen al profesor las estrategias a seguir, basadas en diferentes tipos de problemas, complementadas con material didáctico animado y juegos que permitan incrementar la habilidad para resolver problemas de álgebra. De esta manera se podrá concluir que tanto, el efecto “expertise reversal” (evaluación constante) y el efecto “worked examples” (asignación de tipos de problemas) puede influir en mejorar la habilidad cognitiva de los alumnos, y más aún que tanto puede ayudar en este proceso, el manejar gamificación y el uso de las interfaces tangibles.



Esquema 26. Descripción de la herramienta semi- automatizada, especificando los módulos automatizados y los módulos no automatizados. Fuente: Diseño propio

4.6.2 Módulos manuales o semi – automatizados

Los tres módulos que no se consideran totalmente automatizados son cuatro, el módulo de autoría, el de visualización, el de ejecución y el de administración.

Módulo de autoría

El módulo de autoría, es donde se definieron las estrategias para la aplicación de la gamificación. De manera general, las estrategias que se están manejando son:

- Uso de insignias. Debido a las limitantes mencionadas anteriormente, se optó por trabajar también con un pizarrón gamificado diseñado de manera manual con material sintético, en el cual se pueden colocar las insignias con broches metálicos. Cada alumno diseñó sus propias insignias (9 en total, 3 blancas, 3 amarillas y 3 rojas). El objetivo de las insignias es representar de manera visual y accesible a los alumnos, los avances que va logrando en cada uno de los retos. Las reglas para el manejo de insignias son: por cada actividad realizada correctamente, ya sea manual o mediante la herramienta semi- automatizada, se le otorga una insignia blanca, tres insignias blancas equivalen a una insignia amarilla, tres insignias amarillas, equivalen a una roja y tres insignias rojas equivalen a un premio, que puede ser reflejado en una calificación alta, o a subir de nivel. Así mismo, dependiendo de la dificultad de las actividades realizadas, se puede optar por asignar más de una insignia blanca, o incluso una o más amarillas o una roja.
- Retos. El manejo de retos se hace a través de problemas con un alto grado de dificultad, por lo que si un alumno supera un reto puede ser acreedor a una insignia roja.
- Puntos. El control de los puntos se lleva a través de las insignias.
- Niveles. Los niveles se pueden definir en términos de la dificultad de los problemas.

El objetivo de manejar el pizarrón gamificado, es probar que tanto, el hecho de que un alumno esté visualizando constantemente su avance, puede ayudarlo a incrementar su motivación intrínseca (la relacionada con los objetivos del aprendizaje).

Como complemento a los módulos del tutor, del dominio y del estudiante, y aunque dentro de las partes automatizadas de la herramienta semi-automatizada también se puede llevar un registro de los avances de cada alumno, el objetivo es que el alumno visualice perfectamente sus avances, por lo que se puede optar por llevar el control de los avances tanto de forma automatizada como en el tablero gamificado.

Módulo de visualización

El módulo de visualización es el que se está trabajando con las interfaces tangibles. Esencialmente, por el momento se está trabajando con juegos como el memorama y crucigramas. Para la herramienta semi-automatizada que se está usando dentro del salón de clases, los juegos son los que se están implementando con interfaces tangibles, de tal manera que la herramienta almacenada en la tarjeta digital sea la que se encargue de evaluar al alumno, a través del desempeño en cada uno de los juegos. Por ejemplo, uno de los juegos del memorama, consiste en asociar problemas con sus respectivas expresiones algebraicas, por lo que mediante etiquetas RFID (Radio Frequency Identification, por sus siglas en inglés), se envía la información a la tarjeta electrónica, para que el programa detecte si las parejas seleccionadas por el alumno son correctas. La idea de implementar estos juegos, surge, a partir de la necesidad de tener algo que permitiera evaluar de manera automática los avances del alumno, ya que, como se mencionó anteriormente, el proceso de estar evaluando constantemente, no es nada sencillo.

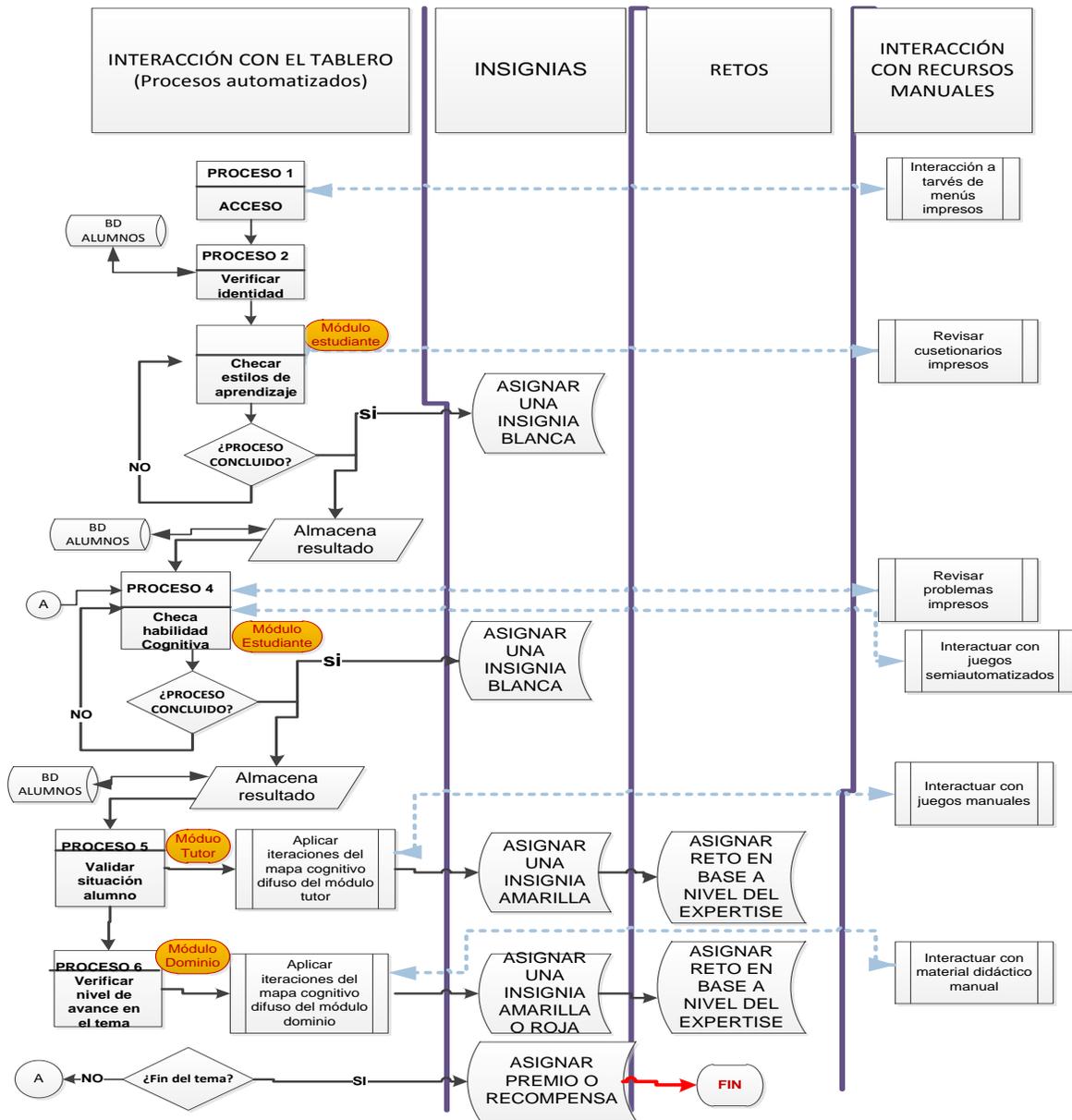
Módulo de Ejecución y Administración

La administración, ejecución y control de toda la información y de todos los procesos, se lleva cabo mediante el programa implementado en lenguaje “c” y almacenado en la tarjeta electrónica. Por el momento, en la primera versión del prototipo, la interacción se realiza a través de una pequeña pantalla de LCD y un teclado de 4 x 4, sin embargo, se está analizando la posibilidad de manejar una pequeña pantalla táctil, aunque esto incrementaría un poco el costo de la

herramienta. Cabe mencionar, que para las partes en las que se requiere visualizar más información, como es el caso de los cuestionarios de los estilos de aprendizaje, se realiza mediante tarjetas impresas, sin embargo, se ha detectado que no es tan agradable para los alumnos.

Como apoyo se puede utilizar una plataforma o página web, en la que también se valla actualizando o sincronizando toda la información que se tenga de manera manual, pero solo a manera de respaldo, ya que los principales logros que se deben evaluar son los que el alumno realice dentro del salón de clases, para evitar sesgos en la información, debido a que como lo interesante de los experimentos es determinar la relación que existe entre las dos características que mencionan los dos efectos de la TCC, la evaluación constante, con los tipos de problemas que se le presentan al alumno.

Finalmente, el diagrama general de las actividades que se incluyen en la herramienta se describen en el Esquema 27 en el que se muestran con círculos en amarillo, los módulos de la arquitectura del tutor que se están implementando. Así mismo, en las dos columnas de en medio, se muestra la forma en que se está implementando la gamificación en la herramienta.



Esquema 27 Diagrama de flujo de los procesos que se realizan en la herramienta semi automatizada. Fuente: Diseño propio

■ **CAPÍTULO 5. RESULTADOS Y DISCUSIÓN.**

Con el objetivo de visualizar los resultados obtenidos a lo largo del proyecto de investigación, se hace un análisis, partiendo de cada uno de los objetivos particulares propuestos y se mencionan las aportaciones logradas.

5.1 Presentación y explicación de resultados

Objetivo Particular 1. *Identificar las teorías que fundamentan la construcción de un tutor cognitivo.*

El análisis que permitió cumplir con este primer objetivo fue el que se realizó en el capítulo 2, el análisis del estado del arte. Mediante el Esquema 1, presentado en dicho capítulo se pudo observar que a partir de los conceptos claves se identificaron algunas de las teorías que pueden sustentar la construcción de un tutor cognitivo, los conceptos y las teorías se muestran en la Tabla 13.

Tabla 13. Algunas teorías y conceptos que sustentan la construcción de un tutor cognitivo.

CONCEPTOS	TEORÍAS
Diseño Instruccional	Carga cognitiva
Resolución de Problemas	Aprendizaje
Habilidad Cognitiva	Sistemas tutoriales
	Lógica difusa
	Interacción humano computadora

Fuente: Diseño propio

A partir del análisis del estado del arte, se pudo constatar que existen diversas investigaciones que incluyen 2, 3, 4, 5 y hasta 6 de los conceptos y/o teorías mencionados en la Tabla 13, por lo que se infiere que incluir 7 o más de los conceptos y/o teorías puede ayudar a generar una propuesta novedosa de un tutor cognitivo, aunque siempre teniendo el cuidado de no querer abarcar mucho, al grado tal que se pierda el control de no poder demostrar la eficiencia de la herramienta. En lo que respecta a la propuesta de este proyecto de investigación, se están proponiendo metodologías de cada uno de los conceptos y teorías mostrados en la Tabla 13, sin embargo, no de todo se llegó a la implementación y prueba. Es decir, los puntos que se atacaron más y que se hicieron experimentos fue la parte de proponer un diseño instruccional para la resolución de problemas de álgebra, apoyado con juegos y sustentado en la teoría de la carga cognitiva. Aunque también se propuso un modelo con sistemas de inferencia difusos y mapas cognitivos difusos, para la parte de la toma de decisiones de las estrategias a seguir para la resolución de problemas de álgebra dependiendo de la habilidad cognitiva de los alumnos, es una parte que solo se ha probado con simulaciones, por lo que las pruebas con estudiantes se dejan para un trabajo posterior.

Objetivo Particular 2. *Identificar un modelo para la resolución de problemas de álgebra*

Este objetivo está muy relacionado con la primera fase de la metodología mostrada en el Esquema 14 del capítulo 4, ya que el identificar el modelo para la resolución de problemas de álgebra permitió diseñar los instrumentos para medir la habilidad cognitiva de los alumnos en la resolución de problemas. El medir la habilidad cognitiva, es un proceso que está íntimamente ligado con el proceso de evaluación, el cual muchas veces puede ser algo muy subjetivo, sin embargo, es necesario tener algo que nos permita cuantificar y más aún, visualizar o determinar el avance que van logrando los alumnos en algún dominio en cuestión. Por tal motivo, después de una revisión de la literatura, y de algunos pilotajes, se pudo determinar que un modelo que podría ser útil es el modelo 3UV (3 usos de la variable), del cual ya se habló ampliamente en el capítulo 3 del marco teórico.

En base a los pilotajes realizados, se pudo observar que uno de los grandes problemas por los cuales los alumnos no dominan el álgebra se debe al hecho de que no es fácil asimilar el concepto de variable, ya que en su afán de resolver el problema siempre quieren asignarles un valor a las letras.

Objetivo Particular 3. *Desarrollar un modelo integral no rígido para evaluar la habilidad cognitiva de los estudiantes.*

Lo más común, cuando se evalúa a un estudiante, es asignarle una calificación cuantitativa en una escala de 0 a 10, sin embargo, muchas veces un valor de 8, puede ser que no nos da mucha información sobre lo que el alumno conoce, por tal motivo se pensó en utilizar un modelo no rígido, como lo menciona el objetivo y se propuso un modelo con lógica difusa, ya que está nos permite trabajar con valores más cercanos a la realidad, es decir, manejando conjuntos difuso que puedan caracterizar al alumno con un cierto grado de pertenencia, de esta manera, si definimos el concepto de “bueno” como un conjunto difuso, podemos decir que la habilidad de un estudiante pertenece al conjunto con un cierto grado de pertenencia, que es el valor difuso, a diferencia de los conjuntos tradicionales, en los que diríamos que el alumno es bueno o no es bueno (solo valores 0 y 1) o dicho de otra manera que pertenece o no al conjunto; por lo tanto, en un conjunto difuso si decimos que un alumno es bueno con un valor de 0.6, entonces nos puede dar mucha más información y decir que es poco lo que le falta para poder ser completamente bueno.

Utilizando la clasificación difusa, las rúbricas basadas en el modelo 3UV y la Taxonomía de Bloom, se pudo proponer un modelo para clasificar a alumno. Para la parte de asociar el modelo 3UV con la Taxonomía de Bloom, se consultó con 18 expertos en la enseñanza del álgebra para que asociaran las preguntas de las rúbricas con la Taxonomía de Bloom y posteriormente modelarlas con el sistema de inferencia difuso, del módulo del estudiante. En la Tabla 14 se muestra un ejemplo de los resultados de la clasificación de los alumnos en base al modelo difuso, en la cual se puede ver que los alumnos pueden ser clasificados, incluso como perteneciendo a dos conjuntos, por ejemplo el alumno etiquetado con el

número 4 queda clasificado en el nivel pasable con un valor de 0.4 y en el nivel pasable con un valor de 0.1, los cuales son datos que proporcionan mejor información, para determinar qué tipo de diseño instruccional se le debe proporcionar, es decir, proporciona información para que el modelo basado en los mapas cognitivos difusos propuesto en la sección 4.7, determine qué tipos de problemas (efecto “worked examples”) y de material didáctico se le debe proporcionar al alumno para que mejore su habilidad cognitiva.

Tabla 14. Resultados de la clasificación de alumnos mediante el modelo difuso

No. Al.	VECTOR G						M	MODELO DIFUSO	
	Recordar	Entender	Aplicar	Analizar	Evaluar	Crear		Valor	Variable Lingüística
1	1	1	1	1	1	1	1	0.927	Excelente=0.7
2	1	0,66	0,67	0,66	1	1	0,798	0.776	Bueno=1
3	0,66	0,33	1	0,66	0,66	0,66	0,662	0.75	Bueno=1
4	0,66	0,33	0,67	0,66	0,33	0,33	0,497	0.408	Pasable=0.4; Medio=0.1
5	0,66	1	1	1	1	1	0,966	0.912	Bueno=0.4; Excelente=0.2
6	0,66	0,33	1	1	1	0,66	0,798	0.75	Bueno=1
7	1	0,66	1	1	1	1	0,932	0.91	Bueno=0.4; Excelente=0.2
8	1	0,66	1	1	1	1	0,932	0.91	Bueno=0.4; Excelente=0.2
9	1	0,66	1	0,66	1	1	0,864	0.903	Bueno=0.4; Excelente=0.2
10	0,33	0,33	0,67	0,66	0	1	0,465	0.75	Bueno=1
11	1	0,33	0,67	1	0,33	0,66	0,632	0.75	Bueno= 1
12	1	0,33	0,67	1	0,33	0,66	0,632	0.75	Bueno=1
13	1	0,66	1	0,66	0,66	1	0,796	0.903	Bueno=0.5; Excelente=0.1
14	0,66	0	0,67	1	0,33	0,66	0,532	0.5	Medio=1
15	0,33	0,6	1	0,66	0,66	1	0,717	0.903	Bueno=0.4; Excelente=0.2
16	0,66	0,66	1	1	0,66	0,33	0,763	0.751	Bueno=1
17	0,33	0	0,67	0,66	0,33	0,33	0,398	0.5	Medio=1
18	0,66	0,66	1	0,66	1	1	0,83	0.5	Medio=1
19	1	0,66	0,67	0,66	0,66	0	0,63	0.795	Bueno=1
20	1	0,33	1	0,66	0,66	1	0,73	0.75	Bueno=1
21	0,33	0,33	0,67	0,66	0,66	0,33	0,53	0.648	Medio=0.1
22	1	0	1	0,66	0,66	0,33	0,597	0.5	Medio=1
23	1	0,66	1	0,66	0	0,33	0,597	0.75	Bueno=1
24	0	1	1	1	1	1	0,9	0.927	Excelente=0.7
25	0,66	0,66	1	1	1	0,66	0,864	0.91	Bueno=0.4; Excelente=0.2
26	0,33	0,66	1	1	0,33	0,66	0,697	0.75	Bueno=1
27	0,66	0,66	0,6	0,66	0,33	0,66	0,582	0.751	Bueno=1
28	0,66	0,66	0,67	0,66	1	1	0,764	0.776	Bueno=1
29	1	0,66	1	1	1	1	0,932	0.91	Bueno=0.4; Excelente=0.2
30	0,66	0,66	1	0,66	0,66	0,66	0,728	0.887	Bueno=1
31	0,46	0,66	0,73	0,53	0,33	0,46	0,542	0.5	Medio=1
32	0,46	0,46	0,8	0,66	0,13	0,46	0,502	0.5	Medio=1
33	0,6	0,53	0,87	0,73	0,53	0,46	0,638	0.534	Medio=1
34	0,66	0,2	0,33	0,13	0,53	0,26	0,33	0.149	Fallido=0.5; Pasable=0.5
35	1	0,53	0,47	0,4	0,73	0,53	0,579	0.5	Medio=1
36	0,33	0,33	0,8	0,66	0,86	0,26	0,589	0.75	Bueno=1
37	1	0,86	1	0,86	0,8	0,8	0,884	0.927	Excelente=0.7
38	0,46	0,8	0,53	0,66	0,26	0,46	0,542	0.75	Medio=1
39	0,66	0,66	0,73	0,86	0,33	0,133	0,595	0.75	Medio=1
40	0,4	0,533	0,67	0,4	0,533	0,46	0,513	0.305	Pasable=0.8

Fuente: Diseño propio

Es importante hacer énfasis, en la importancia de manejar el sistema de inferencia difuso, ya que, al trabajar con el modelo analítico, también se puede obtener una clasificación del alumno, porque también se obtiene un valor que puede indicar el desempeño del estudiante en la resolución de problemas de álgebra, sin embargo, dicho valor no proporciona la información suficiente para determinar en que nivel de la taxonomía de Bloom, el alumno tiene deficiencias, lo cual no ayuda a crear un sistema automatizado que permita al tutor cognitivo proponer estrategias que ayuden al alumno a resolver problemas, evitando de esta manera que el sistema sirva eficientemente como apoyo del docente.

Objetivo específico 4. Determinar el diseño instruccional que corresponde al modelo integral no rígido

En el Esquema 15 del capítulo 4 se muestra un proceso iterativo para una representación general del diseño instruccional, sin embargo, enfocándolo más a los modelos que se utilizan para la propuesta de automatización del diseño instruccional, la propuesta queda como la que se ilustra en el Esquema 22, en la cual ya se relaciona de manera más formal el sistema de inferencia difuso descrito en el objetivo 3, y es parte de la evaluación del estudiante del proceso 1, es decir, serían los datos de entrada para el mapa cognitivo difuso (MCD) que se menciona en el proceso 2. Los parámetros de convergencia del proceso 2, se obtienen después de aplicar el proceso iterativo del MCD; dicho proceso fue programado en Matlab y en la Tabla 15 se muestran algunos de los resultados de convergencia, al aplicar el proceso iterativo. En el proceso 3 se aplica un modelo de inferencia difuso que ayuda a determinar los tipos de problemas que se le deben presentar al alumno, para que pueda mejorar su habilidad cognitiva, dicho modelo corresponde al objetivo específico 6, por lo que se explica más adelante.

Objetivo específico 5. Evaluar las habilidades cognitivas para resolver problemas de álgebra de alumnos de nivel medio superior antes y después de aplicar el diseño instruccional.

Como se mencionó anteriormente, el proceso de estar evaluando al alumno y aplicando el diseño instruccional es un proceso que se va a estar aplicando constantemente, en el capítulo se presentaron los resultados de un pilotaje, aplicando la prueba de hipótesis, en el que se obtuvieron resultados satisfactorios para la aplicación de un diseño instruccional manual, sin embargo, como trabajos futuros se pretende aplicar constantemente estas pruebas de hipótesis ya con el uso del prototipo de la herramienta que se implementó como tutor cognitivo y en la cual se incluya el modelo del Esquema 22 ya automatizado, el cual ya fue programado en un programa de matlab versión 2017. Algunas de las pantallas se muestran al final de este capítulo.

Objetivo específico 6. Definir un modelo inteligente que permita establecer el tipo de problemas y entrenamiento que se le proporcionará al aprendiz, de forma dinámica e interactiva.

El modelo inteligente del que se habla en este objetivo está basado en un mapa cognitivo difuso que corresponde a los temas de tres unidades del curso de álgebra de los Colegios de Estudios Científico y Tecnológicos (CECyTE), el cual se describió en el Esquema 24 del capítulo 4. En la Tabla 15 retomamos los valores del mapa cognitivo difuso de los cinco temas de la primera unidad. Cada uno de los valores de la matriz representan el efecto causal de un nodo sobre otro, es decir, si el concepto del nodo origen aumenta, que tanto aumenta el concepto del nodo destino, así por ejemplo, el valor de 0,81 del nodo 1 al nodo 3 indica que el efecto de aumentar la comprensión del tema del nodo 1 (identificar el lenguaje algebraico) no implica que se va a comprender totalmente el tema del nodo 3 (representación algebraica de expresiones en lenguaje común), por el valor de 0.81, sin embargo, nos da una información más cercana a la realidad de lo que sucede con la causa – efecto, entre nodos, de ahí el valor difuso, ya que si fueran valores duros (0 y 1), la causa – efecto sería total (1) o no existiría (0).

Tabla 15. Matriz asociada al mapa cognitivo difuso de los 5 temas de álgebra.

VALORES DEL MAPA COGNITIVO					
NODOS	1	2	3	4	5
1	0	0.76	0.81	0.72	0.366
2	0.93	0	0.59	0.46	0.255
3	0.61	0.36	0	0.53	0.311
4	0.55	0.29	0.51	0	0.183
5	0.31	0.24	0.28	0.41	0

En la Figura 1 se muestra el proceso iterativo resultante al manejar un vector inicial con los valores de (5, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1), los cuales son los valores que se muestran en la primera fila y se pueden interpretar como el grado de conocimientos que el alumno tiene en cada uno de los temas de los nodos. En este caso se muestra el comportamiento que seguirían las evaluaciones del alumno si se logra obtener los parámetros de cada uno de los valores mostrados en cada una de las filas de la Tabla 15, lo cual es la información que se le debe ir proporcionando al sistema de inferencia difusa, para que determine qué tipo de problemas se le deben ir proporcionando al alumno para que alcance el nivel más alto que en este caso sería el valor 100. En la figura se muestra que todos los valores, después de varias iteraciones, llegan a converger a 100, por lo tanto, estos valores se pueden tomar como referencia para que el sistema haga que el alumno pueda llegar al máximo nivel de comprensión en cada uno de los temas.

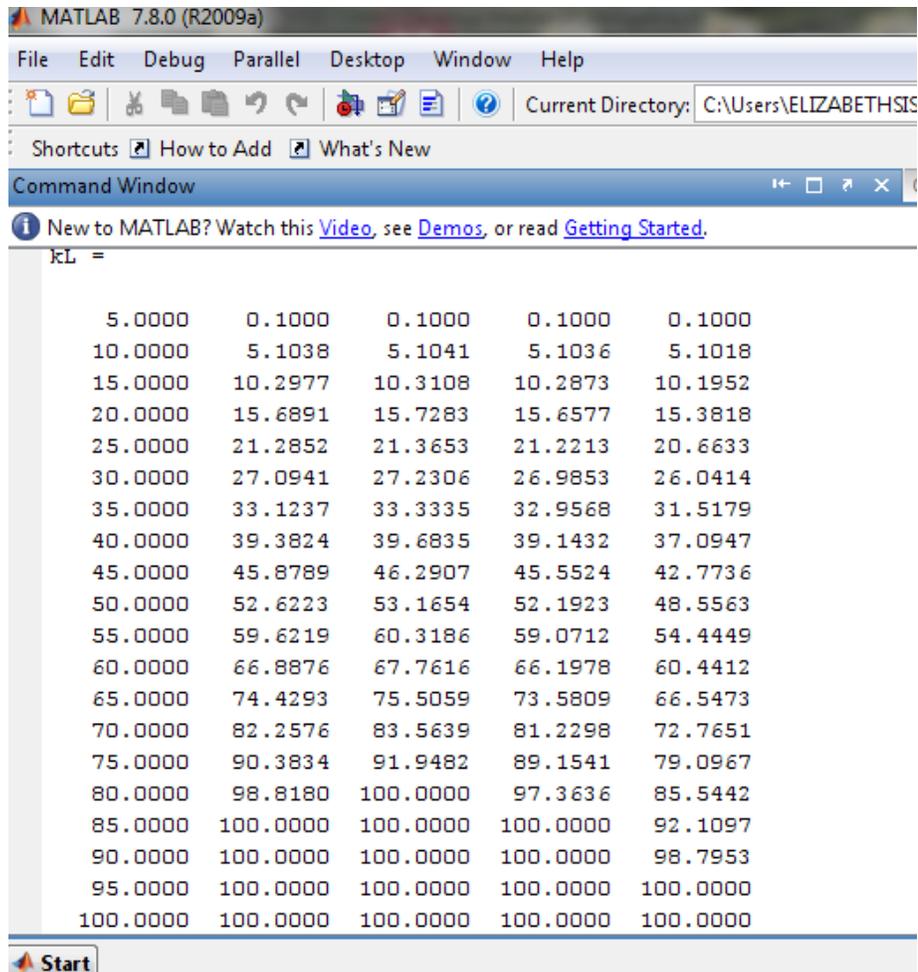
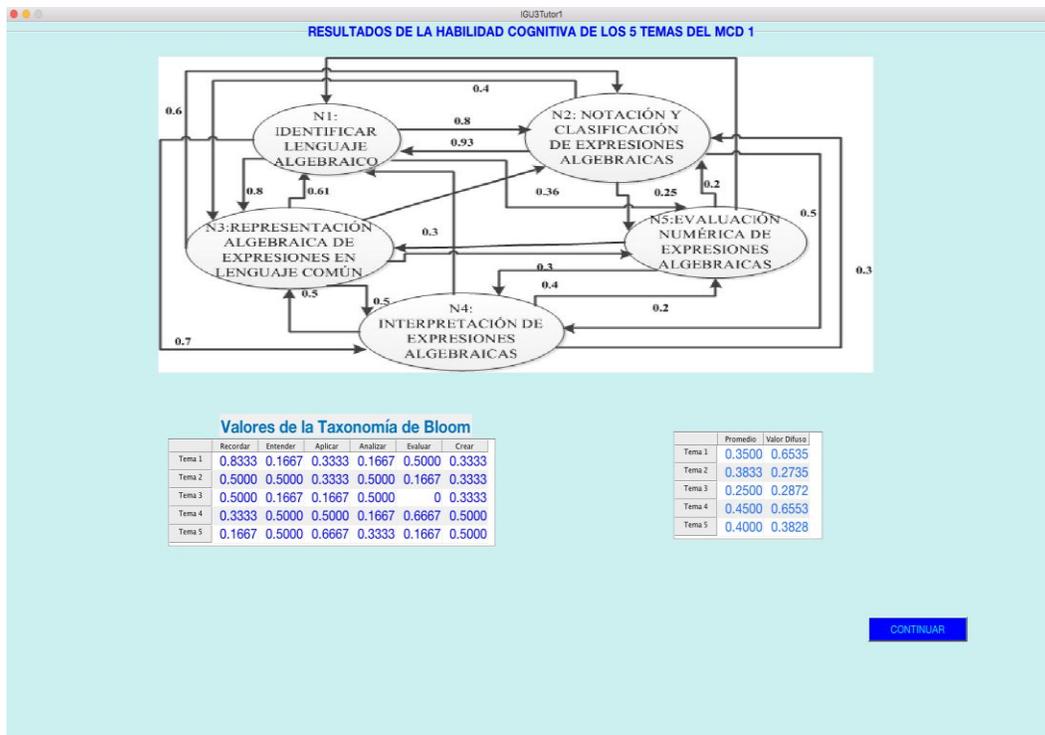


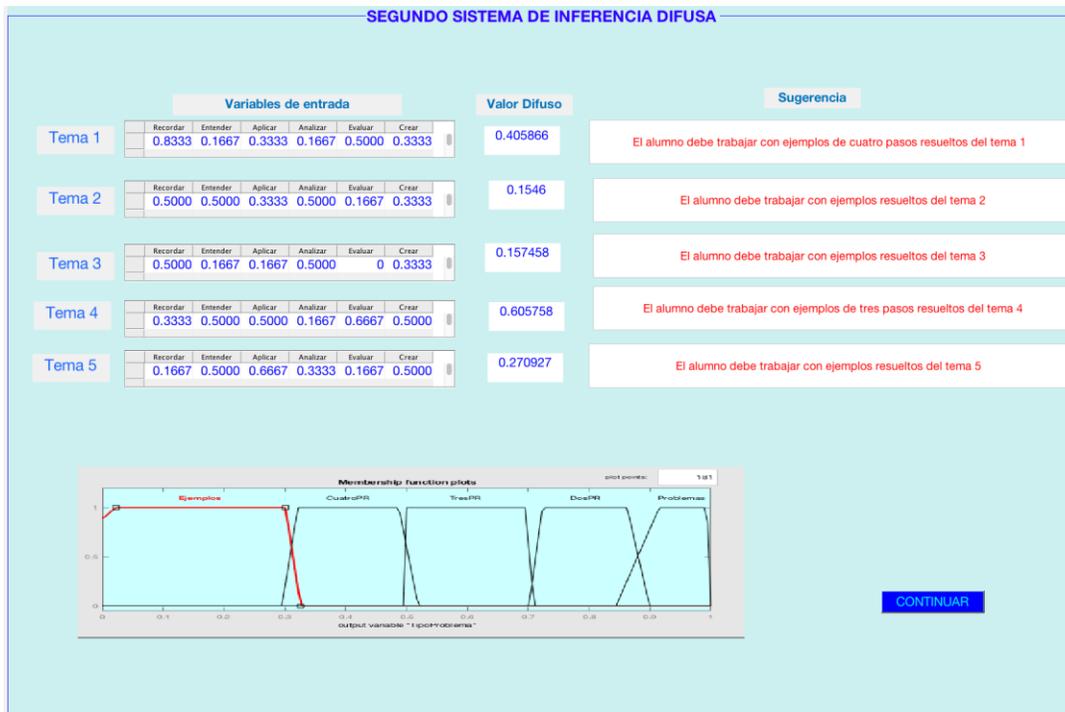
Figura 1. Resultados del proceso iterativo para el mapa cognitivo difuso

En el Esquema 28 y Esquema 29 se muestran dos pantallas de los resultados del proceso iterativo del Esquema 22 que fue programado en “Matlab”.

Una vez implementados los modelos de mapas cognitivos difusos, la idea es implementarlos en la herramienta semi automatizada, para poder aplicar un análisis mixto del uso de la herramienta, la parte cualitativa sería el análisis de su usabilidad, el cual se puede realizar también mediante los resultados cuantitativos de los resultados relacionados con el avance (si se logra) en la comprensión de cómo resolver problemas de álgebra, en un curso tradicional.



Esquema 28. Visualización de los resultados del primer proceso del esquema 22

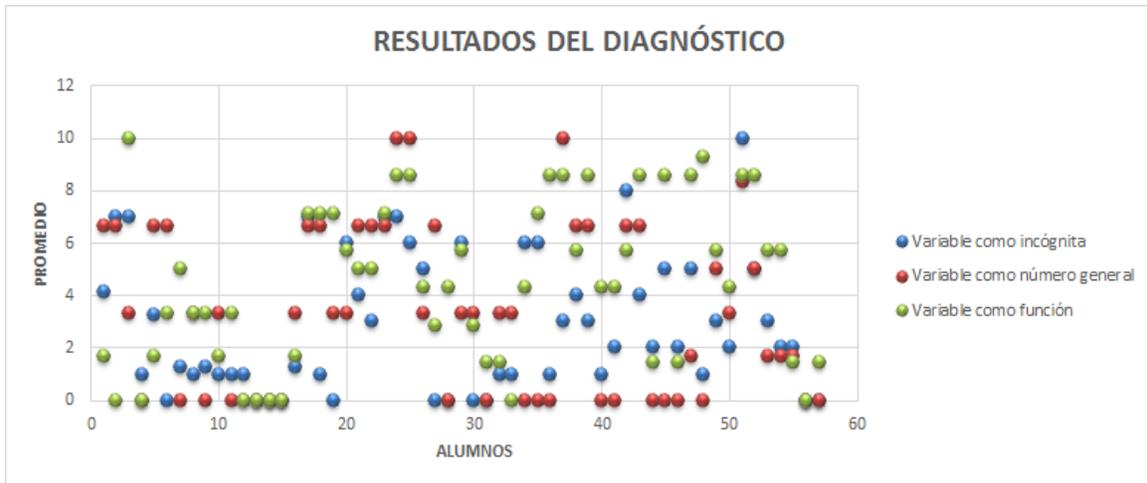


Esquema 29. Visualización de resultados del tercer proceso iterativo del esquema 22

5.2 Resultados de la metodología

5.2.1 Resultados del primer pilotaje

La Gráfica 2 muestra los resultados del primer pilotaje, por tipo de problemas de acuerdo a la clasificación del modelo 3UV y por alumno. Al visualizar los datos de la Gráfica 2 se puede apreciar un comportamiento muy variado en cuanto al desempeño de los alumnos en cada tipo de problema, por lo que para obtener más información se agregan la Tabla 16 y la Gráfica 3. En la Tabla 16 se muestran los resultados del promedio por tipo de problema, esto con la finalidad de visualizar mejor el comportamiento de los resultados en cuanto a l tipo de problema, ya que aquí se puede ver que el promedio más bajo corresponde a los resultados para los problemas con manejo de variable como incógnita. Sin embargo, analizando la Gráfica 3 se puede observar que el 47% de los alumnos obtuvieron un resultado más bajo en los problemas relacionados con el manejo de la variable como número general, el cual es mayor al porcentaje de alumnos que obtuvieron resultados bajos en los problemas relacionados con el manejo de la variable como incógnita (35%), por lo tanto, de este primer pilotaje podemos concluir que la causa por la cual en la Tabla 16, el promedio más bajo del grupo tiene que ver con el manejo de la variable como incógnita, puede deberse a que la diferencia entre los puntajes de los problemas con manejo de la variable como incógnita, fueron muy bajos, comparados con los otros dos tipos de variables (número general y función), aunque los alumnos que fallaron en los problemas relacionados con el manejo de la variable como número general, son más, por lo mostrado en la Gráfica 3. En síntesis, las deficiencias, se encuentran más en dos de los usos de la variable, como incógnita y como número general. Además de que es importante resaltar que de acuerdo a la Tabla 16, los resultados obtenidos, son bajos, ya que los promedios oscilan entre 2.8 y 4.6, en una escala en la que el valor más bajo es el 0 y el más alto es el 10. Es decir, el desempeño del grupo en cuanto a la resolución de problemas de álgebra en general es bajo.



Gráfica 2. Valores obtenidos por tipos de problemas de acuerdo al modelo 3UV por cada uno de los 57 alumnos del CECyTE, en el diagnóstico del primer pilotaje.

Tabla 16. Valores promedio del grupo de los 57 alumnos en cada uno de los tipos de problemas del primer pilotaje

PROMEDIOS		
VARIABLE COMO INCÓGNITA	VARIABLE COMO NÚMERO GENERAL	VARIABLE COMO FUNCIÓN
2.88	3.3041	4.515

Fuente: Diseño propio.

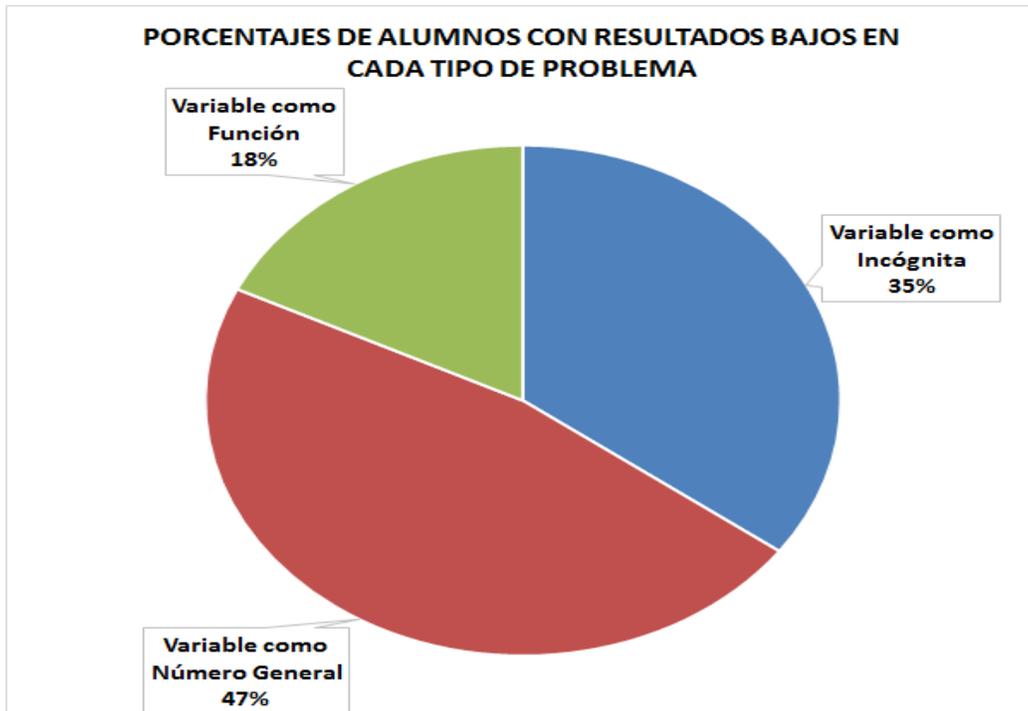
5.2.2 Resultados del segundo pilotaje

Los resultados del segundo pilotaje, fueron analizados de tres maneras:

1. Mediante el análisis gráfico del comportamiento de los resultados, clasificándolos por el tipo de problemas (incógnita, función y número general).
2. A través de un análisis para determinar si los datos obtenidos, clasificándolos en base a 9 variables (promedio por grupo -una

variable-, promedio por tipo de examen -cinco variables-, y promedio por tipo de problemas – tres variables-), se distribuían normalmente.

3. Mediante una prueba de correlación de Pearson que nos permitió verificar si existía una relación entre los 5 tipos de exámenes diseñados.



Gráfica 3. Análisis de los porcentajes de alumnos que obtuvieron los valores más bajos en cada tipo de problema en el grupo de 57 alumnos del primer pilotaje.

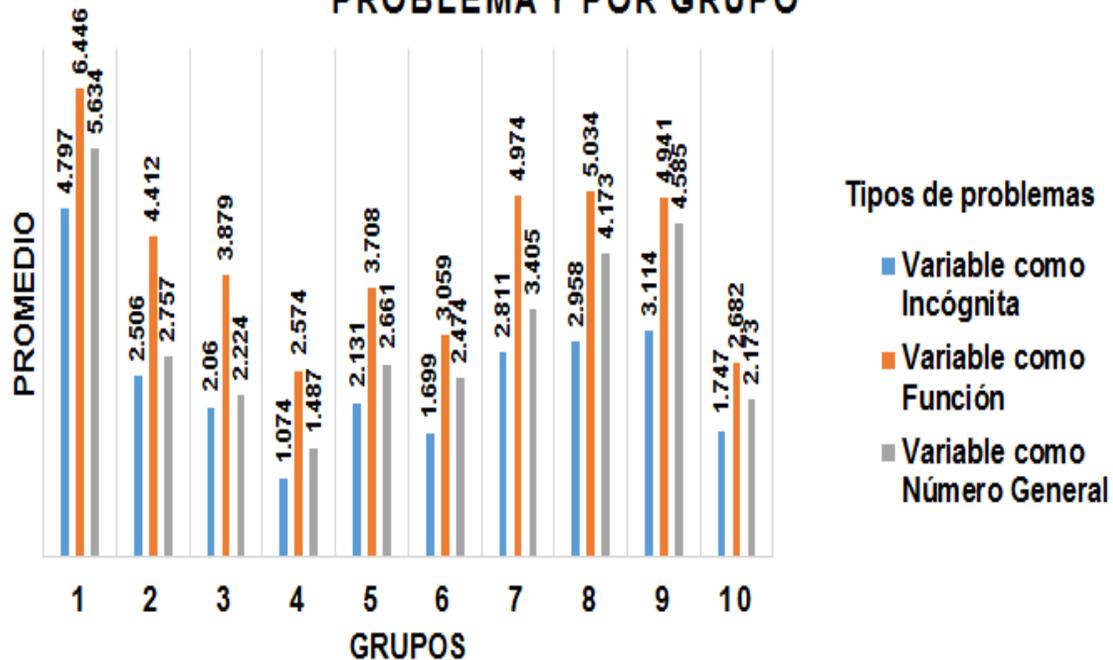
Análisis por tipos de problemas

El análisis se realizó en base a diferentes criterios y gráficas. En principio, se hizo una clasificación general de los resultados, mediante la obtención de los promedios generales de cada uno de los diez grupos y con respecto al tipo de problemas, los cuales se muestran en la Gráfica 4 en la que se puede observar, que los promedios por grupo para los problemas que tienen que ver con el manejo de la variable como incógnita son los más bajos.

También se analizaron los porcentajes de los alumnos que obtuvieron los resultados más bajos en cada uno de los tipos de problemas, por cada uno de los

diez grupos, los cuales se muestran en la Gráfica 5. El objetivo de mostrar los resultados en base a los porcentajes, es para tomar en cuenta que puede existir una relación entre la resolución de problemas en dos de los tipos de variables, como incógnita y como número general. De hecho, en las gráficas los resultados muestran que los valores más bajos se siguen obteniendo en los problemas que tienen que ver con el manejo de la variable como incógnita y como número general, coincidiendo con los resultados obtenidos en el primer pilotaje. Aunque analizando más a detalle las gráficas 3 y 4, se puede observar que los promedios de las Gráfica 4, muestran que en todos los grupos el valor más bajo se obtiene en los problemas que tienen que ver con el manejo de la variable como incógnita, sin embargo, analizando los resultados mediante los porcentajes mostrados en la Gráfica 5 se puede ver que en 3 de los 10 grupos es más alto el porcentaje de alumnos que tiene resultados bajos en los problemas que tienen que ver con el manejo de la variable como número general, en 6 de los 10 grupos si es más alto el porcentaje de resultados bajos en el manejo de la variable como incógnita y solo en uno de los grupos los porcentajes son prácticamente iguales, dándose un comportamiento similar al primer pilotaje, es decir, que la diferencia entre los promedios de los resultados por tipos de problemas puede ser muy amplio, lo cual da como consecuencia que el promedio para el manejo de la variable como incógnita sea el más bajo.

PROMEDIOS DEL PRE TEST POR TIPO DE PROBLEMA Y POR GRUPO

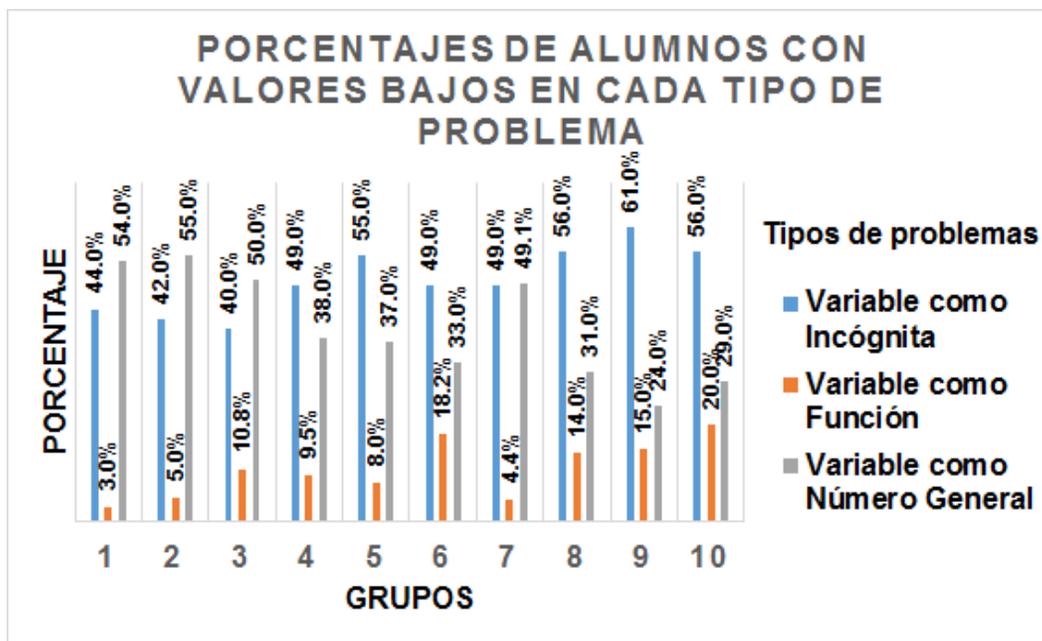


Gráfica 4. Clasificación de los resultados del pre test, en base a los promedios por tipos de problemas del modelo 3UV, que obtuvieron cada uno de los diez grupos de alumnos.

Análisis de la normalidad de los datos

Para asegurar la eficiencia de los datos obtenidos al aplicar la prueba en el pre test, se analizó la normalidad de los datos, en base a diferentes criterios derivados de las características de los instrumentos que se utilizaron, lo cual dio lugar a considerar como variables los promedios obtenidos en los nueve criterios que se consideraron. Por lo tanto, las variables son: promedio por grupo (una variable), promedio por tipo de examen (cinco variables) y promedio por tipo de problemas (tres variables). Cada una de las variables se considera como resultado de cada uno de los diez grupos considerados en la muestra del experimento pre test. En la

Tabla 17 se muestra el resumen del procesamiento de casos para la prueba de normalidad y en la Tabla 18 se muestran los resultados.



Gráfica 5. Clasificación de los resultados del pre test del segundo pilotaje, en base a los porcentajes de alumnos que obtuvieron resultados bajos en cada uno de los tipos de problemas del modelo 3UV.

Debido a que en todos los casos, la muestra fue menor a treinta, se tomaron en cuenta los resultados de la prueba de Shapiro-Wilk, por lo que en la Tabla 19 se verifica si cada una de las variables cumplen con el criterio de normalidad, el cual es:

Si P-Valor (Significancia) $\geq \alpha$ **Aceptar H_0** = Los datos provienen de una distribución **normal**.

Si P-Valor (Significancia) $< \alpha$ **Aceptar H_1** = Los datos **NO** provienen de una distribución **normal**.

De acuerdo a lo mostrado en la Tabla 19 se puede concluir que todos los datos, de los 9 criterios considerados para cada una de las variables, provienen de una distribución normal.

Tabla 17. Resumen del procesamiento de casos de la prueba de normalidad para 9 variables del pretest.

Variables	Casos					
	Válido		Perdidos		Total	
	N	Porcentaje	N	Porcentaje	N	%
Promedio de cada grupo	10	100%	0	0.0%	10	100%
Promedio de examen 1	10	100%	0	0.0%	10	100%
Promedio de examen 2	10	100%	0	0.0%	10	100%
Promedio de examen 3	10	100%	0	0.0%	10	100%
Promedio de examen 4	10	100%	0	0.0%	10	100%
Promedio de examen 5	10	100%	0	0.0%	10	100%
Promedio de problemas con incógnita	10	100%	0	0.0%	10	100%
Promedio de problemas con número general	10	100%	0	0.0%	10	100%
Promedio de problemas con función	10	100%	0	0.0%	10	100%

Fuente: Diseño propio.

Análisis de correlación para los cinco tipos de exámenes

Se realizó un análisis de correlación entre cada uno de los tipos de exámenes, aplicando la correlación de Pearson. En la Tabla 20 se muestran los resultados de la correlación, la cual, entre cada uno de los exámenes resultó dentro del rango de correlaciones positivas, lo cual nos indica que de alguna manera, si se está midiendo lo mismo en cada uno de los exámenes.

Tabla 18. Resultados de la prueba de normalidad para 9 variables del pretest del segundo pilotaje

Variables	Kolmogorov-Smirnof			Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl	Sig.	Estadístico	gl	Sig.
Promedio de cada grupo	0.147	10	0.200	0.952	10	0.695
Promedio de examen 1	0.206	10	0.200	0.856	10	0.069
Promedio de examen 2	0.261	10	0.052	0.882	10	0.136
Promedio de examen 3	0.236	10	0.120	0.897	10	0.201
Promedio de examen 4	0.148	10	0.200	0.925	10	0.404
Promedio de examen 5	0.133	10	0.200	0.976	10	0.939
Promedio de problemas con incógnita	0.185	10	0.200	0.921	10	0.366
Promedio de problemas con número general	0.128	10	0.200	0.955	10	0.723
Promedio de problemas con función	0.226	10	0.160	0.935	10	0.503

Fuente: Diseño propio.

5.2.3 Resultados de la prueba de hipótesis

En base a los resultados obtenidos en los dos pilotajes aplicados, se pudo observar que las deficiencias en la resolución de problemas, se presentan más en los problemas relacionados con el manejo de la variable como incógnita, lo cual resulta ser un tanto preocupante, ya que son temas básicos del álgebra que sirven de sustento para la comprensión de temas más complejos, por lo tanto, el hecho de que el alumno no domine estos temas, puede ser la causa de su bajo rendimiento en otras áreas de las matemáticas.

Tabla 19. Análisis de resultados de la prueba de normalidad para los promedios de diferentes categorías en las que se clasificaron los datos del pretest del segundo pilotaje.

NORMALIDAD			
VARIABLES	P_Valor	Desigualdad que cumple	Intervalo de confianza α
Promedio de cada grupo	0.695	>	0.05
Promedio de examen 1	0.069	>	0.05
Promedio de examen 2	0.136	>	0.05
Promedio de examen 3	0.201	>	0.05
Promedio de examen 4	0.404	>	0.05
Promedio de examen 5	0.939	>	0.05
Promedio de problemas con incógnita	0.366	>	0.05
Promedio de problemas con número general	0.723	>	0.05
Promedio de problemas con función	0.503	>	0.05

Fuente: Diseño propio.

Tabla 20. Resultados de la prueba de correlación de Pearson aplicada a los diferentes tipos de exámenes.

	Examen 1	Examen 2	Examen 3	Examen 4	Examen 5
Examen 1	-----	0.794	0.542	0.796	0.496
Examen 2	0.794	-----	0.647	0.922	0.671
Examen 3	0.542	0.647	-----	0.717	0.679

Examen 4	0.796	0.922	0.717	-----	0.753
Examen 5	0.496	0.671	0.679	0.753	-----

Fuente: Diseño propio

5.3 Análisis de resultados preliminares del post test

Prueba de hipótesis

El resultado del valor de significancia para las muestras emparejadas entre el pre test y el post test se muestra en la Tabla 21 en el que podemos ver que se cumple que el valor de significancia es menor que 0.05, por lo tanto se deduce que ***se rechaza H_0 , es decir, se acepta H_1*** ; por lo tanto podemos concluir que ***para esta muestra*** se cumple la hipótesis de que ***si hay diferencias entre el antes y el después del diseño instruccional ya que $\mu_1 \neq \mu_2$*** .

Con base en los resultados mostrados en la Tabla 22 se puede observar que la diferencia de medias se debe a que μ_2 , la media del pos test es mayor que la media del pre test en un nivel significativo, tal que nos permite afirmar que la diferencia entre el antes y el después es por un aumento en la habilidad cognitiva en la resolución de problemas.

Tabla 21. Resultado del valor de significancia para la prueba de hipótesis

Significancia	α
0.000	< 0.05

Fuente: Diseño propio.

Tabla 22 . Valores de la media para los promedios obtenidos en el pre test y en el post test

	MEDIA
Promedio Pre Tests	0.1184
Promedio Post Test	0.5586

Fuente: Diseño propio.

Análisis de Regresión

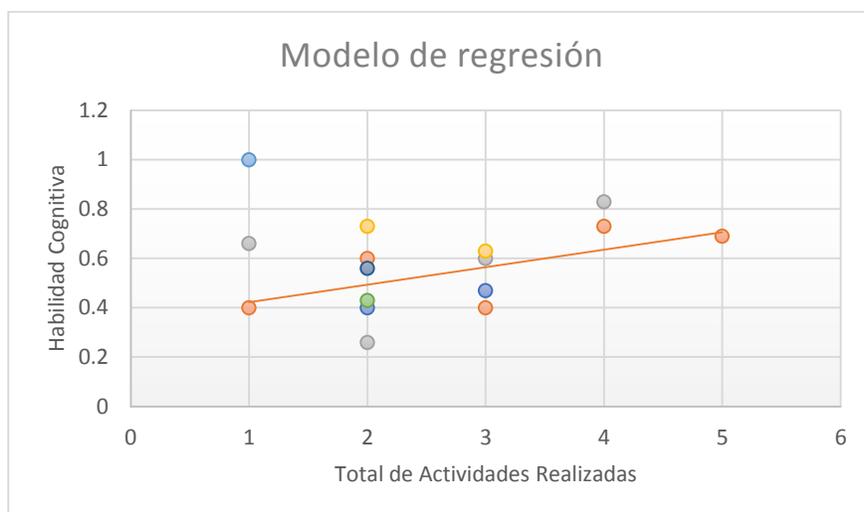
Como se mencionó anteriormente, la asistencia de los alumnos al taller, no fue constante, por lo que se consideró importante, analizar, la relación que se da entre el número de actividades realizadas dentro del taller (variable independiente) y la habilidad cognitiva en la resolución de problemas (variable dependiente), después del taller.

Los valores y la gráfica de la recta de regresión se muestran en la Tabla 23 y en la Gráfica 6, respectivamente. En la gráfica se puede observar que la pendiente es positiva, lo que indica que conforme el número de actividades del taller aumenta, se incrementa la habilidad cognitiva.

Tabla 23. Valores obtenidos del análisis de regresión entre las variables: habilidad cognitiva y total de actividades realizadas durante el taller

COEFICIENTES DEL MODELO DE REGRESIÓN	
MODELO	B
Constante	0.405
Total de actividades realizadas en el taller	0.060

Fuente: Diseño propio.



Gráfica 6. Modelo de regresión que representa la relación entre el total de actividades realizadas durante el taller y la habilidad cognitiva.

Finalmente, los parámetros del análisis de regresión se muestran en la Tabla 24. De acuerdo a los criterios de la regresión lineal, si $R=0$, no existe una correlación entre variables, si $0.0 \leq R < \pm 0.20$, existe correlación significativa, si $\pm 0.20 \leq R \leq \pm 0.40$, existe correlación baja, si $\pm 0.40 \leq R \leq \pm 0.70$, existe correlación significativa y $\pm 0.70 \leq R \leq \pm 1.00$, existe un alto grado de correlación; por lo tanto, de acuerdo al valor presentado en la tabla 10, existe una correlación significativa. Así mismo, el valor de R cuadrado obtenido, indica que el 16.9% del coeficiente del promedio, ganado en el postest, se debe al número de actividades realizadas en el taller.

Tabla 24. Parámetros del análisis de regresión.

PARÁMETRO	VALOR	INTERPRETACIÓN
R	0.411	Correlación significativa
R Cuadrado	0.169	16.9% relacionado con total de actividades
Error estándar	0.138	13.8% de datos no caen en la recta

Significancia	$0.081 > \alpha$	Se rechaza H_0
----------------------	------------------	------------------

Fuente: Diseño propio

En cuanto al error estándar típico de la estimación, de la Tabla 24, como es sabido, representa una medida de la parte de la variabilidad de la variable dependiente, que en este caso es la habilidad cognitiva, que no es explicado por la recta de regresión. En general, cuanto mejor es el ajuste más pequeño es este error típico. Por lo tanto, el valor de 0.138 significa que el 13.8% de los datos no son explicados por la regresión, o sea no caen en la recta.

El último valor de la Tabla 24, el de significancia, nos permite determinar si se acepta o se rechaza la hipótesis nula definida en base a la relación lineal de la siguiente manera:

H_0 : $R=$, pendiente = 0

H_1 : $R > 0$; Variables linealmente relacionadas.

El criterio para aceptar o rechazar la hipótesis nula es:

Si la significancia $> \alpha = 0.05$ entonces se rechaza la hipótesis nula y se acepta la hipótesis alternativa. De acuerdo al valor mostrado en la Tabla 24, se puede verificar que Significancia = $0.081 > \alpha$, por lo tanto se acepta la hipótesis de que el parámetro R es mayor que 0 y las variables están linealmente relacionadas.

5.3.1 Discusión de los resultados

A lo largo del proyecto de tesis, se aplicaron principalmente 3 teorías, la de la Carga Cognitiva, la de los Sistemas Tutoriales Inteligentes y la de la Lógica Difusa. La primera, la de la Carga Cognitiva, sustenta en dos de sus efectos, que fueron los que se aplicaron en esta investigación, que es muy importante estar evaluando constantemente al alumno, para determinar si tiene los conocimientos previos necesarios para aprender cosas nuevas y además, para determinar qué tipo de

diseño instruccional basado en problemas, se le debe ir proporcionando. Por los resultados obtenidos al momento podemos concluir que efectivamente, el hecho de evaluar constantemente al alumno, ayuda mucho a mejorar sus habilidades en la resolución de problemas.

Por su parte la forma en como la teoría de los Sistemas Tutoriales Inteligentes, proporciona las bases para construir herramientas digitales que sirvan de auxiliar en el proceso de enseñanza aprendizaje, facilita mucho el proceso de implementar este tipo de herramientas, y más aún, es la base para poder identificar y organizar todos los requerimientos teóricos, como se demostró en el capítulo 2 del estado del arte.

Finalmente, la teoría de la lógica difusa, es un buen sustento para poder construir sistemas que tengan la capacidad de simular la toma de decisiones, por lo tanto, es un muy buen complemento, tanto para la teoría de la carga cognitiva, como herramienta de automatizar los proceso relacionados con la cognición, y para la teoría de los sistemas tutoriales inteligentes, para automatizar el módulo del dominio de dichos sistemas.

■ **CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES.**

Con el objetivo de visualizar los resultados obtenidos a lo largo del proyecto de investigación, se hace un análisis, partiendo de cada uno de los objetivos particulares propuestos y se mencionan las aportaciones logradas.

6.1 Análisis de los resultados

Objetivo Particular 1. *Identificar las teorías que fundamentan la construcción de un tutor cognitivo.*

El desarrollo de un tutor cognitivo, es una tarea no tan sencilla que conlleva el análisis de diversas teorías, por lo que, a lo largo del proceso de toda la

investigación relacionada con la propuesta y parte de la implementación de un tutor, se tuvieron que identificar y analizar las teorías que se requerían para sentar las bases fundamentales para su implementación. Dicho análisis fue lo que condujo a un análisis del estado del arte y la creación del marco teórico de esta investigación. Como resultado del análisis se identificaron que para la implementación de un tutor cognitivo, es necesario tener en cuenta por lo menos una teoría relacionada con el proceso de enseñanza – aprendizaje, otra teoría que tenga que ver precisamente con la implementación de Sistemas Tutoriales Inteligentes, una teoría relacionada con la forma en que el usuario o estudiante interactúa con la herramienta didáctica, y la teoría que nos ayude a simular el comportamiento del experto, para que a la herramienta se le pueda llamar inteligente.

Para la parte relacionada con los procesos de enseñanza – aprendizaje, se consideraron dos teorías, la primera tiene que ver con una teoría del aprendizaje, para deducir la forma en que los estudiantes aprenden, y la teoría de la carga cognitiva para de alguna manera sustentar, los procesos implementados en la resolución de problemas de álgebra en una teoría que indique la forma en que se llevan a cabo los procesos cognitivos en el estudiante, al momento de almacenar, en la memoria de trabajo, los conceptos aprendidos a través de la resolución de problema. La teoría relacionada con los Sistemas Tutoriales Inteligentes, marcó la pauta para definir una arquitectura gamificada que fue la que se utilizó en la propuesta del Tutor Cognitivo. En lo que se refiere a la parte de la interacción del usuario con el tutor, se hizo uso de la teoría de la Interacción Humano – Computadora, y más específicamente, de técnicas de gamificación e interfaces tangibles, ya que la necesidad de implementar una herramienta semi-automatizada, condujo a buscar alternativas de implementación, con requerimientos menos costosos y más accesibles. Por último, para la parte inteligente del tutor cognitivo se hizo uso de la lógica difusa, mediante el manejo de sistemas de inferencia difusos y mapas cognitivos difusos.

Partiendo de estas teorías se realizó el análisis del estado del arte, del cual dio como resultado que existen diversas investigaciones que están desarrollando tutoriales inteligentes, en los cuales utilizan las teorías mencionadas anteriormente, sin embargo, son pocas las propuestas que incluyen todas las teorías al mismo tiempo, lo cual da como resultado, áreas de oportunidad para el desarrollo de nuevas propuestas. En lo que respecta a la presente investigación, se consideró la aplicación de todas las teorías, aunque no en su totalidad, lo cual es parte de la aportación del proyecto de tesis.

Objetivo Particular 2. *Identificar un modelo para la resolución de problemas de álgebra*

Este objetivo está muy relacionado con la primera fase de la metodología mostrada en el Esquema 14 del capítulo 4, ya que el identificar el modelo para la resolución de problemas de álgebra permitió diseñar los instrumentos para medir la habilidad cognitiva de los alumnos en la resolución de problemas. El medir la habilidad cognitiva, es un proceso que está íntimamente ligado con el proceso de evaluación, el cual muchas veces puede ser algo muy subjetivo, sin embargo, es necesario tener algo que nos permita cuantificar y más aún, visualizar o determinar el avance que van logrando los alumnos en algún dominio en cuestión. Por tal motivo, después de una revisión de la literatura, y de algunos pilotajes, se pudo determinar que un modelo que podría ser útil es el modelo 3UV (3 usos de la variable), del cual ya se habló ampliamente en el capítulo 3 del marco teórico.

Así mismo y de manera general se considera que la propuesta del diseño instruccional, basado en la evaluación constante de la habilidad para resolver problemas de álgebra por parte de los alumnos mediante la aplicación de rúbricas basadas en el modelo 3UV y la evaluación de las mismas mediante la Taxonomía de Bloom y un sistema de inferencia difuso, proporcionó resultados que permitieron clasificar a los alumnos, para posteriormente, aplicar el modelo basado en mapas cognitivos difuso en conjunto con otro sistema de inferencia difuso, que dio lugar al modelo que propone sugerencias de los tipos de materiales didácticos y los tipos de problemas que el alumno puede ir resolviendo. Con la

implementación automatizada de estos procesos, se genera una herramienta de apoyo para el docente que le permite clasificar a los alumnos, de tal manera que pueda determinar las deficiencias que impiden que el alumno avance en la comprensión de los temas de álgebra. Con esto se cumple gran parte de las necesidades que se menciona en los efectos de la teoría de la carga cognitiva utilizados en esta investigación, el de “expertise reversal” mediante la evaluación constante que el modelo permite que se valla haciendo al alumno, y el de “worked examples” al proponer material didáctico basado en diversos tipos de problemas.

Con base en los pilotajes realizados, se pudo observar que uno de los grandes problemas por los cuales los alumnos no dominan el álgebra se debe al hecho de que no es fácil asimilar el concepto de variable, ya que en su afán de resolver el problema siempre quieren asignarles un valor a las letras.

Objetivo Particular 3. *Desarrollar un modelo integral no rígido para evaluar la habilidad cognitiva de los estudiantes.*

Lo más común, cuando se evalúa a un estudiante, es asignarle una calificación cuantitativa en una escala de 0 a 10, sin embargo, muchas veces un valor de 8, puede ser que no nos de mucha información sobre lo que el alumno conoce, por tal motivo se pensó en utilizar un modelo no rígido, como lo menciona el objetivo y se propuso un modelo con lógica difusa, ya que está nos permite trabajar con valores más cercanos a la realidad, es decir, manejando conjuntos difuso que puedan caracterizar al alumno con un cierto grado de pertenencia, de esta manera, si definimos el concepto de “bueno” como un conjunto difuso, podemos decir que la habilidad de un estudiante pertenece al conjunto con un cierto grado de pertenencia, que es el valor difuso, a diferencia de los conjuntos tradicionales, en los que diríamos que el alumno es bueno o no es bueno (solo valores 0 y 1) o dicho de otra manera que pertenece o no al conjunto; por lo tanto, en un conjunto difuso si decimos que un alumno es bueno con un valor de 0.6, entonces nos puede dar mucha más información y decir que es poco lo que le falta para poder ser completamente bueno. Más aún, el hecho de decir que la clasificación del alumno es que pertenece al conjunto “bueno” con un valor de 0.6,

permite identificar si el alumno no es totalmente bueno (o sea no tiene un valor de 1), debido a que a lo mejor tiene problemas con la habilidad de recordar algunos conceptos básicos que se utilizan en la resolución de un problema determinado, y de esa manera el modelo de inferencia difusa puede tomar la decisión de proponer actividades que fortalezcan esa deficiencia.

Utilizando la clasificación difusa, las rúbricas basadas en el modelo 3UV y la Taxonomía de Bloom, se pudo proponer un modelo para clasificar a alumno. Para la parte de asociar el modelo 3UV con la Taxonomía de Bloom, se consultó con 18 expertos en la enseñanza del álgebra para que asociaran las preguntas de las rúbricas con la Taxonomía de Bloom y posteriormente modelarlas con el sistema de inferencia difuso, el cual se mostró en la Tabla 12 de la sección 4.5.1 del capítulo 4. En la Tabla 14 se muestra un ejemplo de los resultados de la clasificación de los alumnos en base al modelo difuso, en la cual se puede ver que los alumnos pueden ser clasificados, incluso como perteneciendo a dos conjuntos, por ejemplo el alumno etiquetado con el número 4 queda clasificado en el nivel pasable con un valor de 0.4 y en el nivel pasable con un valor de 0.1, los cuales son datos que proporcionan mejor información, para determinar que tipo de diseño instruccional se le debe proporcionar, es decir, proporciona información para que el modelo basado en los mapas cognitivos difusos propuesto en la sección 4.5.2, determine qué tipos de problemas (efecto “worked examples”) y de material didáctico se le debe proporcionar al alumno para que mejore su habilidad cognitiva.

Objetivo específico 4. Determinar el diseño instruccional que corresponde al modelo integral no rígido

La propuesta del diseño instruccional, ha sido una de las principales aportaciones de este proyecto de investigación, ya que no solo pudo ser probado mediante la impartición de un taller basado en el diseño instruccional, utilizando herramientas manuales, sino que también fue la base para determinar los procesos y modelos que se requerían para lograr automatizar los módulos que contienen la parte inteligente del tutor cognitivo.

Así mismo, la propuesta del diseño instruccional, condujo a crear el experimento que permitió probar la hipótesis principal de este proyecto de investigación,

Es importante recalcar que el diseño instruccional tiene como principales fundamentos, la evaluación constante y la resolución de problemas, siendo la evaluación constante un tema que da pauta para generar experimentos cuantitativos, cualitativos o mixtos que pueden ser temas principales de futuros proyectos de investigación y que pueden aportar resultados muy interesantes para la enseñanza – aprendizaje de temas en los que la resolución de problemas es primordial para su aprendizaje.

Cabe recalcar, como aportación primordial de este objetivo, la integración de tres importantes teorías dentro del diseño instruccional, las cuales son: la teoría de la carga cognitiva, de la lógica difusa, y de la interacción humano – computadora, a través de la gamificación y de las interfaces tangibles, lo que dio origen a la herramienta semi automatizada que se implementó.

Objetivo específico 5. Evaluar las habilidades cognitivas para resolver problemas de álgebra de alumnos de nivel medio superior antes y después de aplicar el diseño instruccional.

Como se mencionó en el objetivo 4, la evaluación constante es un tema primordial del diseño instruccional propuesto, y además fue la clave para poder probar la hipótesis de este proyecto. Por lo tanto, el identificar la forma de evaluar el avance en el desempeño del estudiante en la resolución de problemas, también ha sido un punto medular del proyecto de investigación, y más aún, era importante no perder de vista que al proponer la forma de evaluar también se tenía que considerar que el proceso debía de ser automatizado, por lo tanto, la forma en que se llevó a cabo la evaluación y clasificación del alumno es una importante aportación.

Se puede decir que, además de permitir probar la hipótesis, los procesos de evaluación propuestos, basados en el modelo 3UV, son una opción viable para automatizar el diseño instruccional.

Objetivo específico 6. Definir un modelo inteligente que permita establecer el tipo de problemas y entrenamiento que se le proporcionará al aprendiz, de forma dinámica e interactiva.

Los resultados generados por los tres modelos difusos propuestos, aún cuando no han sido probados con el uso de la herramienta propuesta, son resultados lógicos que dan la pauta para proponer estrategias que ayuden a mejorar la habilidad cognitiva de los estudiantes en la resolución de problemas de álgebra. Además, los procesos iterativos pueden ser la opción para minimizar el arduo trabajo que el docente tiene que estar realizando constantemente de manera manual, motivo por el cual, muchas veces, la educación no puede ser personalizada ni adaptativa, lo que conduce a un aprendizaje no significativo. Una parte importante dentro de este objetivo, que puede ser considerado como trabajo futuro, es la evaluación de la eficiencia de los modelos difusos propuestos, a través de experimentos cuantitativos, cualitativos o mixtos.

6.2 Resultados publicados

Durante el desarrollo del proyecto de tesis, se generaron algunos artículos que permitieron ir publicando diversos resultados que fueron aportando a los resultados finales del proyecto.

Una de las fases iniciales en el desarrollo del tutor cognitivo estaba relacionada con crear instrumentos que ayudaran a evaluar a los estudiantes en la resolución de problemas de álgebra, por lo que una primera propuesta de estas rúbricas fue publicada en la Conferencia Conjunta Iberoamericana sobre Tecnologías del Aprendizaje (CCITA 2015). En este artículo ya se estaba trabajando con la Teoría de la Carga Cognitiva y ya se visualizaba la evaluación de la resolución de problemas mediante rúbricas y un modelo analítico basado en

la Taxonomía de Bloom, lo cual fue un esquema que sirvió de base para la construcción de la metodología del diseño instruccional que se utilizó para la propuesta e implementación del tutor cognitivo (Pedroza & González-Calleros, 2015).

Continuando con la identificación de elementos que permitieran evaluar el desempeño de los estudiantes en la resolución de problemas de álgebra, se incluyó el modelo 3UV (3 usos de la variable) como parte de la investigación, lo cual permitió mejorar las rúbricas del instrumento de medición y, además, utilizando el mismo modelo analítico del artículo anterior, complementado con un sistema de inferencia difusa, se propuso un modelo que permite clasificar a los alumnos en base a su habilidad para resolver problemas de álgebra, de una manera más eficiente. La propuesta del sistema de inferencia difuso fue publicada en un artículo corto en el 11 Congreso Colombiano de Computación (B.-E. Pedroza-Méndez, González-Calleros, & Juárez-Ruiz, 2016).

El análisis del estado del arte basado en las principales teorías y conceptos ilustrados en el Esquema 1, permitió generar una clasificación que dio lugar a un artículo que fue publicado en la revista indexada “Research Computing Science” (B.-E. Pedroza-Méndez, Gonzalez-Calleros, Guerrero-García, & Reyes-García, 2017).

Una de las partes medulares del proyecto de tesis es la propuesta, prueba, e implementación de la metodología del diseño instruccional que dio lugar al diseño del tutorial cognitivo. Dentro de estos procesos se generaron cuatro artículos; uno esta relacionado con la implementación de la herramienta semiautomatizada, en la que se consideran la implementación de los diferentes módulos del tutor cognitivo, mediante una tarjeta electrónica, tarjetas RFID y juegos basados en interfaces tangibles, este artículo fue publicado en el Congreso de Interacción 2017 (B. E. Pedroza-Méndez, González-Calleros, Guerrero-García, Collazos, & Ramírez-Cruz, 2017). Otros dos de los tres artículos restantes ya fueron sometidos a revisión, uno en la revista indexada “Campus Virtuales” y otro en la revista “Journal of Information Technology Research”. En el de la revista de

campus virtuales se incluyó la arquitectura del tutor cognitivo y la descripción de las actividades de cada uno de los módulos; y en el de la revista “Journal of Information Technology Research” se incluyó toda la propuesta de la metodología del diseño instruccional, incluyendo los resultados del experimento de la implementación manual de dicha metodología y de la prueba de hipótesis. El artículo de la revista “Journal of Information Technology Research” ya pasó la primera revisión y ya fue pre – aceptado y el de la revista de campus virtuales aún continúa en revisión. El cuarto artículo tiene que ver con los modelos inteligentes que se incluyen en los módulos del modelo de estudiante, del modelo de tutor y del dominio, los cuales son dos sistemas de inferencia difusa y un modelo de mapas cognitivos difusos; se pretende que dicho artículo sea sometido a revisión en un JCR.

6.3 Trabajos futuros

En base a los experimentos realizados, se pudo observar que existen muchas áreas de oportunidad dentro las actividades de la docencia, que pueden dar lugar a generar herramientas automatizadas o semi – automatizadas, ya que muchas de esas actividades están relacionadas con evidenciar dos cosas: la primera tiene que ver con las actividades que el docente realiza con los estudiantes para lograr el aprendizaje, pero al final, la evidencia medible del resultado del aprendizaje tiene que ver con la evaluación. Por lo tanto, el obtener evidencias del aprendizaje y evidencias de la evaluación son dos factores que pueden ser áreas de oportunidad para generar herramientas automatizadas o semi – automatizadas que sirvan de apoyo al docente en su diaria labor educativa. Se considera que, en la propuesta realizada en este proyecto de tesis, se han abordado e implementado, algunas estrategias tanto para la parte de actividades para el aprendizaje y la propuesta de estrategias para la evaluación, sin embargo, el campo de investigación es muy amplio, por lo que algunos proyectos que se pueden considerar como continuación de esta tesis son los que se describen a continuación:

- Implementar un tablero gamificado electrónico automatizado.
- Manejar otros tipos de interfaces tangibles.
- Probar otras técnicas de tomas de decisiones para la parte del modelo inteligente, dentro del módulo del dominio.
- Implementar otros tipos de juegos para la resolución de problemas.
- Realizar otros tipos de diseños experimentales.
- Probar la metodología del diseño instruccional con otros temas de las matemáticas o incluso con otras áreas en las que se considere la resolución de problemas como parte primordial para el aprendizaje.
- Implementar técnicas automatizadas para medir la carga cognitiva.
- Integrar técnicas para la detección de emociones dentro del módulo del modelo del estudiante.
- Implementar técnicas automatizadas para la detección de los estilos de aprendizaje dentro del módulo del modelo del estudiante.

■ REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Adams, N. E. (2015). Bloom ' s taxonomy of cognitive learning objectives. *Journal of Medical Library Association*, 103(3), 152–153.
<http://doi.org/http://dx.doi.org/10.3163/1536-5050.103.3.010>
- Aguilar, J. (2004). Dynamic Random Fuzzy Cognitive Maps. *Computacion Y Sistemas*, 7(4), 260–270.
- Aguilar, J. (2005). A Survey about Fuzzy Cognitive Maps Papers (Invited Paper). *International Journal of Computational Cognition*, 3(2), 27–33.
- Alsubait, T. M., & Khamis, M. M. (2011). IDEAL: an Intelligent Distributed Experience-based Adaptive Learning Model. *J Ar Hum*.

- Álvarez, I., M^a, I., Chacón, G., & Ursini, S. (2015). Understanding the Algebraic Variable : Comparative Study of Mexican and Spanish Students, *11*(6), 1507–1529. <http://doi.org/10.12973/eurasia.2015.1409a>
- Alzahrani, I., & Woollard, J. (2013). The Role of the Constructivist Learning Theory and Collaborative Learning Environment on Wiki Classroom, and the Relationship between Them. *Online Submission*. Retrieved from <http://prx.library.gatech.edu/login?url=https://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=eric&AN=ED539416&site=eds-live&scope=site>
- Andrade-Lotero, L. A. (2012). Teoría de la carga cognitiva, diseño multimedia y aprendizaje: Un estado del arte. *Magis*, *5*(10), 75–92. <http://doi.org/10.11144/4166>
- Arroyo, I., Woolf, B. P., Burelson, W., Muldner, K., Rai, D., & Tai, M. (2014). A multimedia adaptive tutoring system for mathematics that addresses cognition, metacognition and affect. *International Journal of Artificial Intelligence in Education*, *24*(4), 387–426. <http://doi.org/10.1007/s40593-014-0023-y>
- Background, T. (2012). *Encyclopedia of the Sciences of Learning. The Sciences*. <http://doi.org/10.1007/978-1-4419-1428-6>
- Bailey, J., & Taylor, M. (2015). Experiencing a mathematical problem-solving teaching approach : Opportunities to identify ambitious teaching practices, *17*, 111–124.
- Barón, H. B., González, R., Jordán, C. , Espada, P., Sanjuán Martínez, O., Barón, H. B., ... Martínez, O. S. (2015). Assessment of learning in environments interactive through fuzzy cognitive maps. *Soft Comput*, *19*, 1037–1050. <http://doi.org/10.1007/s00500-014-1313-x>
- Barrera-García, F. (2003). *Las Matemáticas Y El Abandono Escolar*.
- Barrón-Estrada, M. L., Zatarain-Cabada, R., Beltrán V., J. A., Cibrian R., F. , & Hernández Pérez, Y. (2012). An Intelligent and Affective Tutoring System

within a Social Network for Learning Mathematics, 651–661.

Biggs, J. (1996). Mejoramiento de la enseñanza mediante la alineación constructiva, 1–9.

Biggs, J. (2004). Calidad del aprendizaje universitario. *Educativo Siglo XXI*. Retrieved from <http://revistas.um.es/index.php/educatio/article/viewFile/109/93>

Bossomaier, T. (2015). *Serious Games and Gaming* (Vol. 4). <http://doi.org/10.1007/978-94-017-9517-3>

Bruner, J. S. (1978). *El proceso mental del aprendizaje*. (S. A. de E. M. Narcea, Ed.).

Caro, M. F., & Jimenez, J. A. (2014). MOF-based metamodel for pedagogical strategy modeling in Intelligent Tutoring Systems. *2014 9th Computing Colombian Conference, 9CCC 2014*, 1–6. <http://doi.org/10.1109/ColumbianCC.2014.6955365>

Carroll, J. B. (1993). *Human Cognitive Abilities. A survey of factor analytic studies*.

Carvalho, J. P., & Tomé, José, A. B. (1999). Rule Based Fuzzy Cognitive Maps and Fuzzy Cognitive Maps—A Comparative Study. *Asterix.Ist.Utl.Pt*, 115–119. Retrieved from http://ieeexplore.ieee.org/xpls/abs_all.jsp?arnumber=781665%5Cnhttp://asterix.ist.utl.pt/uke/papers/NAFIPS99rbfcm-fcm.pdf

Chen, O., Kalyuga, S., & Sweller, J. (2015). The worked example effect , the generation effect and element interactivity. *Journal of Educational Psychology*, 107(3), 689–704. <http://doi.org/10.1037/edu0000018>

Chen, Y. (2012). Assessment System based on Scaffolding and Bloom ' s Theory. *Journal of Digital Content Technology and Its Applications (JDCTA)*, 6(6), 218–227. <http://doi.org/10.4156/jdcta.vol6.issue6.26>

Cheng, T. S., Lu, Y. C., & Yang, C. S. (2015). Using the multi-display teaching

- system to lower cognitive load. *Educational Technology and Society*, 18(4), 128–140.
- Cheon, J., & Grant, M. M. (2012). The effects of metaphorical interface on germane cognitive load in Web-based instruction. *Educational Technology Research and Development*, 60(3), 399–420. <http://doi.org/10.1007/s11423-012-9236-7>
- Chinnappan, M. (2010). Cognitive Load and Modelling of an Algebra Problem. *Mathematics Education Research Journal*, 22(2), 8–23. <http://doi.org/10.1007/BF03217563>
- Choi, H.-H., van Merriënboer, J. J. G., & Paas, F. (2014). Effects of the Physical Environment on Cognitive Load and Learning: Towards a New Model of Cognitive Load. *Educational Psychology Review*, 26(2), 225–244. <http://doi.org/10.1007/s10648-014-9262-6>
- Chrysafiadi, K., & Virvou, M. (2013). A knowledge representation approach using fuzzy cognitive maps for better navigation support in an adaptive learning system. *SpringerPlus*, 2(1), 81. <http://doi.org/10.1186/2193-1801-2-81>
- CNN. (2014). Matemáticas, clave para tener uno de los mejores trabajos de 2014. Retrieved from <http://cnnespanol.cnn.com/2014/07/19/matematicas-clave-para-tener-uno-de-los-mejores-trabajos-de-2014/>
- Cole, J. R., & Persichitte, K. A. (2000). Fuzzy cognitive mapping: Applications in education. *International Journal of Intelligent Systems*, 15(1b), 1–25. [http://doi.org/10.1002/\(SICI\)1098-111X\(200001\)15:1<1::AID-INT1>3.0.CO;2-V](http://doi.org/10.1002/(SICI)1098-111X(200001)15:1<1::AID-INT1>3.0.CO;2-V)
- Conde-ram, J. C., & Abraham, S. (2014). Evocación de hábitos en personajes virtuales mediante Mapas Cognitivos Difusos y técnicas de videojuegos, 73, 73–87.
- Cuendet, S., Dehler-Zufferey, J., Ortoleva, G., & Dillenbourg, P. (2015). An integrated way of using a tangible user interface in a classroom. *International*

Journal of Computer-Supported Collaborative Learning, 10(2), 183–208.
<http://doi.org/10.1007/s11412-015-9213-3>

Deterding, S., Dixon, D., Khaled, R., & Nacke, L. (2011). From game design elements to gamefulness. *Schriften Zur Soziotechnischen Integration, Band 3*, 15(2), 2797. <http://doi.org/10.1081/E-ELIS3-120043942>

Dillenbourg, P., & Jermann, P. (2010). Technology for Classroom Orchestration, 525–552. <http://doi.org/10.1007/978-1-4419-5716-0>

Dung, P. Q., & Florea, A. M. (2012). A literature-based method to automatically detect learning styles in learning management systems. *Proceedings of the 2nd International Conference on Web Intelligence, Mining and Semantics - WIMS '12*, 1. <http://doi.org/10.1145/2254129.2254186>

Eisenmann, P., Novotná, J., Příbyl, J., & Břehovský, J. (2015). The development of a culture of problem solving with secondary students through heuristic strategies. *Mathematics Education Research Journal*, 27(4), 535–562. <http://doi.org/10.1007/s13394-015-0150-2>

Faghihi, U., Brautigam, A., Jorgenson, K., Martin, D., Brown, A., Measures, E., & Maldonado-Bouchard, S. (2014). How gamification applies for educational purpose specially with college algebra. *Procedia Computer Science*, 41, 182–187. <http://doi.org/10.1016/j.procs.2014.11.102>

Fazel Zarandi, M. H., Khademian, M., Minaei-bidgoli, B., & Türkşen, I. B. (2012). A Fuzzy Expert System Architecture for Intelligent Tutoring Systems: A Cognitive Mapping Approach. *Journal of Intelligent Learning Systems and Applications*, 4(February), 29–40. <http://doi.org/10.4236/jilsa.2012.41003>

Feldman, J., Monteserin, A., & Amandi, A. (2014). Automatic detection of learning styles: state of the art. *Artificial Intelligence Review*, (May 2014), 157–186. <http://doi.org/10.1007/s10462-014-9422-6>

Flavell, J. H. (1979). Metacognition and cognitive monitoring: A new area of

- cognitive–developmental inquiry. *American Psychologist*, 34(10), 906–911.
<http://doi.org/10.1037/0003-066x.34.10.906>
- Francisco-Aparicio, A., Gutiérrez-Vela, F.-L., Isla-Montes, J.-L., & González-Sánchez José-Luis. (2013). Gamification: Analysis and Application, 45–61.
<http://doi.org/10.1007/978-1-4471-5445-7>
- Franck Derroncourt. (2013). Introduction to fuzzy logic control. *Essentials of Fuzzy Modeling and Control*, (January), 109–153.
<http://doi.org/10.1017/CBO9781107415324.004>
- Garcia-H., H., Reyes-Garcia, C. A., & Morales-G., R. (2004). On the design and implementation of Fuzzy Cognitive Maps for Intelligent Tutoring Systems The Tolman ' s Learning Theory.
- Goksu, I., & Ph, D. (2016). The Evaluation of the Cognitive Learning Process of the Renewed Bloom Taxonomy Using a Web Based Expert System, 15(4), 135–152.
- González, C., Mora, A., & Toledo, P. (2014). Gamification in intelligent tutoring systems. *Proceedings of the Second International Conference on Technological Ecosystems for Enhancing Multiculturality - TEEM '14*, 221–225. <http://doi.org/10.1145/2669711.2669903>
- Gray, S. A., Sanre, E., & Gray, S. R. J. (2014). Fuzzy Cognitive Maps as Representations of Mental Models and Group Beliefs. In E. I. Papageorgiou (Ed.), *Fuzzy Cognitive Maps for Applied Sciences and Engineering* (VOLUME 54).
- Groumos, P. P. (2010). Fuzzy Cognitive Maps: Basic theories and their application to complex systems. *Fuzzy Cognitive Maps*, 247, 1–22.
http://doi.org/10.1007/978-3-642-03220-2_1
- Grover, S., Bienkowski, M., Niekrasz, J., & Hauswirth, M. (2016). Assessing Problem-Solving Process a t Scale, 245–248.

- Guerrero, G., Ayala, A., Mateu, J., Casades, L., & Alamán, X. (2016). Integrating Virtual Worlds with Tangible User Interfaces for Teaching Mathematics: A Pilot Study. *Sensors*, 16(11), 1775. <http://doi.org/10.3390/s16111775>
- Haciomeroglu, E. S. (2015). The role of cognitive ability and preferred mode of processing in students' calculus performance. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 11(5), 1165–1179. <http://doi.org/10.12973/eurasia.2015.1400a>
- Hanus, M. D., & Fox, J. (2015). Assessing the effects of gamification in the classroom: A longitudinal study on intrinsic motivation, social comparison, satisfaction, effort, and academic performance. *Computers and Education*, 80, 152–161. <http://doi.org/10.1016/j.compedu.2014.08.019>
- Hartman, H., & Sternberg, R. J. (1992). A broad BACEIS for improving thinking. *Instructional Science*, 21(5), 401–425. <http://doi.org/10.1007/BF00121204>
- Hassan, O. a. B. (2011). Learning theories and assessment methodologies – an engineering educational perspective. *European Journal of Engineering Education*, 36(March 2015), 327–339. <http://doi.org/10.1080/03043797.2011.591486>
- Hong, J. Y., & Kim, M. K. (2015). Mathematical Abstraction in the Solving of Ill-Structured Problems by Elementary School Students in Korea. *EURASIA Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 12(2), 267–281. <http://doi.org/10.12973/eurasia.2016.1204a>
- Ishii, H. (2008). The tangible user interface and its evolution. *Communications of the ACM*, 51(6), 32. <http://doi.org/10.1145/1349026.1349034>
- Jegatha Deborah, L., Baskaran, R., & Kannan, A. (2014). Learning styles assessment and theoretical origin in an E-learning scenario: a survey. *Artificial Intelligence Review*, 42(4), 801–819. <http://doi.org/10.1007/s10462-012-9344-0>

- Johanyák, Z. C. (2010). Survey on five fuzzy inference-based student evaluation methods. *Studies in Computational Intelligence*, 313(CI), 219–228. http://doi.org/10.1007/978-3-642-15220-7_18
- Jupri, A., Drijvers, P., & Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2014). Student difficulties in solving equations from an operational and a structural perspective. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 9(1–2), 39–55.
- Jurdak, M. (2016). Learning and Teaching Real World Problem Solving in School Mathematics, 181–195. <http://doi.org/10.1007/978-3-319-08204-2>
- Kalyuga, S. (2006). Assessment of learners' organised knowledge structures in adaptive learning environments. *Applied Cognitive Psychology*, 20(3), 333–342. <http://doi.org/10.1002/acp.1249>
- Kalyuga, S. (2011). Cognitive Load Theory: How Many Types of Load Does It Really Need? *Educational Psychology Review*, 23(1), 1–19. <http://doi.org/10.1007/s10648-010-9150-7>
- Kalyuga, S., Ayres, P., Chandler, P., & Sweller, J. (2003). The Expertise Reversal Effect. *Educational Psychologist*, 38(1), 23–31. http://doi.org/10.1207/S15326985EP3801_4
- Kalyuga, S., Chandler, P., Tuovinen, J., & Sweller, J. (2001). When problem solving is superior to studying worked examples. *Journal of Educational Psychology*, 93(3), 579–588. <http://doi.org/10.1037//0022-0663.93.3.579>
- Kalyuga, S., Rikers, R., & Paas, F. (2012). Educational Implications of Expertise Reversal Effects in Learning and Performance of Complex Cognitive and Sensorimotor Skills. *Educational Psychology Review*, 24(2), 313–337. <http://doi.org/10.1007/s10648-012-9195-x>
- Kar, S., Das, S., & Ghosh, P. K. (2014). Applications of neuro fuzzy systems: A brief review and future outline. *Applied Soft Computing*, 15, 243–259. <http://doi.org/10.1016/j.asoc.2013.10.014>

- Khachatryan, G. A., Romashov, A. V., Khachatryan, A. R., Gaudino, S. J., Khachatryan, J. M., Guarian, K. R., & Yufa, N. V. (2014). Reasoning mind genie 2: An intelligent tutoring system as a vehicle for international transfer of instructional methods in mathematics. *International Journal of Artificial Intelligence in Education*, 24(3), 333–382. <http://doi.org/10.1007/s40593-014-0019-7>
- Kolfschoten, G., French, S., & Brazier, F. (2014). A discussion of the cognitive load in collaborative problem-solving. *European Journal on Decision Processes*, 2(3–4), 257–280. <http://doi.org/10.1007/s40070-014-0034-9>
- Kosko, B. (1986). Fuzzy cognitive maps. *International Journal of Man-Machine Studies*, 24(1), 65–75. [http://doi.org/10.1016/S0020-7373\(86\)80040-2](http://doi.org/10.1016/S0020-7373(86)80040-2)
- Kosko, B. (1988). Hidden patterns in combined and adaptive knowledge networks. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2(4), 377–393. [http://doi.org/10.1016/0888-613X\(88\)90111-9](http://doi.org/10.1016/0888-613X(88)90111-9)
- Kramarski, B., & Friedman, S. (2014). Solicited versus Unsolicited Metacognitive Prompts for Fostering Mathematical Problem Solving Using Multimedia. *Journal of Educational Computing Research*, 50(3), 285–314. <http://doi.org/10.2190/EC.50.3.a>
- Kreinovich, V., & Stylios, C. D. (2015). Why fuzzy cognitive maps are efficient. *International Journal of Computers, Communications and Control*, 10(6), 825–833. Retrieved from <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-84959340669&partnerID=40&md5=f3d751c165a2d0fe4d06b8ca40e79b38>
- Kulkarni, C., Papadopoulos, K., Cheng, J., Koller, D., & Klemmer, S. R. (2013). Peer and Self Assessment in Massive Online Classes, 20(6).
- Lach, P. (2013). Student 's Effort During Assessment, 346–351.
- Larrazolo, N., Backhoff, E., & Tirado, F. (2013). Habilidades de razonamiento matemático de estudiantes de educación media superior en México. *Revista*

Mexicana de Investigación Educativa, 1137–1163.

- Latham, A., Crockett, K., McLean, D., & Edmonds, B. (2012). A conversational intelligent tutoring system to automatically predict learning styles. *Computers and Education*, 59(1), 95–109. <http://doi.org/10.1016/j.compedu.2011.11.001>
- Legovich, S. U. (1993). Pupils' Approaches To Different Characterizations of Variable in Logo.
- Leppink, J., Broers, N. J., Imbos, T., van der Vleuten, C. P. M., & Berger, M. P. F. (2012). Self-explanation in the domain of statistics: An expertise reversal effect. *Higher Education*, 63(6), 771–785. <http://doi.org/10.1007/s10734-011-9476-1>
- Lin, J. J. H., & Lin, S. S. J. (2014). Cognitive Load for Configuration Comprehension in Computer-Supported Geometry Problem Solving: an Eye Movement Perspective. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 12(3), 605–627. <http://doi.org/10.1007/s10763-013-9479-8>
- Long, Y., & Aleven, V. (2014). Gamification of Joint Student/System Control Over Problem Selection in a Linear Equation Tutor. *Science*, 37, 849–874. <http://doi.org/10.1007/978-3-319-07221-0>
- Matsuda, N., Cohen, W. W., & Koedinger, K. R. (2015). Teaching the teacher: Tutoring simstudent leads to more effective cognitive tutor authoring. *International Journal of Artificial Intelligence in Education*, 25(1), 1–34. <http://doi.org/10.1007/s40593-014-0020-1>
- Mavrikis, M., Noss, R., Hoyles, C., & Geraniou, E. (2013). Sowing the seeds of algebraic generalization: Designing epistemic affordances for an intelligent microworld. *Journal of Computer Assisted Learning*, 29(1), 68–84. <http://doi.org/10.1111/j.1365-2729.2011.00469.x>
- Mendonça, M., de Arruda, L. V. R., & Neves, F. (2014). Fuzzy Cognitive Maps for Applied Sciences and Engineering. *Intelligent Systems Reference Library*, 54,

159–175. <http://doi.org/10.1007/978-3-642-39739-4>

Mendoza Juárez, Y. L., & Mamani Gamarra, J. (2012). Estrategias De Enseñanza - Aprendizaje De Los Docentes De La Facultad De Ciencias Sociales De La Universidad Nacional Del Altiplano – Puno 2012 . Teaching Strategies - Learning of Teachers of the Faculty of Social Sciences At the National University of Th.

Miao, Y., & Liu, Z.-Q. (1999). Fuzzy Cognitive Map and Its Causal Inferences, 3(Cvml), 1540–1545 vol.3. <http://doi.org/10.1109/FUZZY.1999.790133>

Millis, K., Forsyth, C., Wallace, P., Graesser, A. C., & Timmins, G. (2016). The Impact of Game-Like Features on Learning from an Intelligent Tutoring System. *Technology, Knowledge and Learning*, 22(1), 1–22. <http://doi.org/10.1007/s10758-016-9289-5>

Mislevy, R. J., Behrens, J. T., Dicerbo, K. E., & Levy, R. (2012). Design and discovery in educational assessment: Evidence-centered design, psychometrics, and Educational Data Mining. *Journal of Educational Data Mining*, 4(1), 11–48. Retrieved from http://www.educationaldatamining.org/JEDM/images/articles/vol4/issue1/MislevyEtAlVol4Issue1P11_48.pdf

Moreno, J. L. (1998). Statistical Literacy - Statistics Long After School. *Statistics*, 447–452.

Mozelius, P., Fagerström, A., & Söderquist, M. (2016). Motivating Factors and Intrinsic Integration of Knowledge in Educational Games. *European Conference on Games Based Learning*, 500–508. Retrieved from <https://search.proquest.com/docview/1859714978?accountid=15870>

Mukhtar, H. (2016). Conceptual Model to Incorporate Serious Games Mechanics in Intelligent Tutoring Systems, 5(September), 13–18.

Muñoz-Arteaga, J., González-Calleros, J. M., & Sánchez-Huitrón, A. (2015). *La*

- Ngu, B. H., Yeung, A. S., & Tobias, S. (2014). Cognitive load in percentage change problems: Unitary, pictorial, and equation approaches to instruction. *Instructional Science*, 42(5), 685–713. <http://doi.org/10.1007/s11251-014-9309-6>
- OCDE. (2016). *Programa para la evaluación internacional de alumnos (PISA) PISA 2015 - Resultados. MÉXICO.* Retrieved from <https://www.oecd.org/pisa/PISA-2015-Mexico-ESP.pdf>
- Özata Yücel, E., & Özkan, M. (2015). Development and Implementation of an Instructional Design for Effective Teaching of Ecosystem, Biodiversity, and Environmental Issues. *Educational Sciences: Theory & Practice*, 15(4), 1051–1069. <http://doi.org/10.12738/estp.2015.4.2579>
- Paas, F., Renkl, A., & Sweller, J. (2004). Cognitive Load Theory: Instructional Implications of the Interaction between Information Structures and Cognitive Architecture. *Instructional Science*, 32(1–2), 1–8.
- Paas, F., & Sweller, J. (2012). An Evolutionary Upgrade of Cognitive Load Theory: Using the Human Motor System and Collaboration to Support the Learning of Complex Cognitive Tasks. *Educational Psychology Review*, 24(1), 27–45. <http://doi.org/10.1007/s10648-011-9179-2>
- Papageorgiou, E. I., & Salmeron, J. L. (2013). A review of fuzzy cognitive maps research during the last decade. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 21(1), 66–79. <http://doi.org/10.1109/TFUZZ.2012.2201727>
- Papageorgiou, E. I., & Salmeron, J. L. (2014). Methods and Algorithms for Fuzzy Cognitive Map-based Modeling. In E. I. Papageorgiou (Ed.), *Fuzzy Cognitive Maps for Applied Sciences and Engineering* (pp. 1–28).
- Paquette, L., Lebeau, J.-F., & Andre, M. (2012). Automating Next-Step Hints Generation Using ASTUS, 7315(April 2016). <http://doi.org/10.1007/978-3-642->

- Parsopoulos, K. E., Papageorgiou, E. I., Groumpos, P. P., & Vrahatis, M. N. (2003). A first study of fuzzy cognitive maps learning using particle swarm optimization. *IEEE Congress on Evolutionary Computation*, 1440–1447.
- Pedroza-Méndez, B.-E., Gonzalez-Calleros, J. M., Guerrero-García, J., & Reyes-García, C.-A. (2017). Toward the design of a cognitive tutor for algebra with gamification : a survey of state-of-the-art. *Research in Computing Science*, 1–12.
- Pedroza-Méndez, B.-E., González-Calleros, J. M., & Juárez-Ruiz, E.-L. (2016). Un modelo difuso para determinar el nivel cognitivo , usando la taxonomía de Bloom (pp. 2–5).
- Pedroza-Méndez, B. E., González-Calleros, J. M., Guerrero-García, J., Collazos, C. A., & Ramírez-Cruz, J. F. (2017). Attach me and Detach me: An Interactive Device to Help to Teach Algebra. *Scientia et Cognitio*, 239–245.
- Pedroza, B.-E., & González-Calleros, J. M. (2015). Diseño de rúbricas para determinar el nivel de expertise de un alumno para implementar un tutorial.
- Peña-Ayala, A., & Sossa-Azuela, J. H. (2014). Decision Making by Rule-Based Fuzzy Cognitive Maps: An Approach to Implement Student-Centered Education. *Fuzzy Cognitive Maps for Applied Sciences and*, 54, 107–120.
- Perez Torres, I. (2010). Habilidades Cognitivas, (1979), 1–26. Retrieved from <http://es.slideshare.net/isaperez/habilidades-cognitivas-985846>
- Piech, C., Huang, J., Sahami, M., & Guibas, L. (2015). Autonomously generating hints by inferring problem solving policies (pp. 195–204). Association for Computing Machinery, Inc. <http://doi.org/10.1145/2724660.2724668>
- Pollack, C. (2012). The Invisible Link: Using State Space Representations to Investigate the Connection Between Variables and Their Referents. *Mind, Brain, and Education*, 6(3), 156–163. <http://doi.org/10.1111/j.1751->

- Pourjavad, E., & Mayorga, R. V. (2017). A comparative study and measuring performance of manufacturing systems with Mamdani fuzzy inference system. *Journal of Intelligent Manufacturing*. <http://doi.org/10.1007/s10845-017-1307-5>
- Ramirez-Noriega, A., Reyes, J.-R., Martinez-Ramirez, Y., Jimenez, S., & Inzunza, S. (2016). Using Bayesian Networks for Knowledge Representation and Evaluation in Intelligent Tutoring Systems. *Data Mining in Academic Databases*, 2, 189–198. <http://doi.org/10.1007/978-3-319-31232-3>
- Razzaq, L., & Heffernan, N. T. (2010). Hints: Is it better to give or wait to be asked? *Lecture Notes in Computer Science (Including Subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*, 6094 LNCS(PART 1), 349–358. http://doi.org/10.1007/978-3-642-13388-6_39
- Reed, S. K., Corbett, A., Hoffman, B., Wagner, A., & MacLaren, B. (2013). Effect of worked examples and Cognitive Tutor training on constructing equations. *Instructional Science*, 41(1), 1–24. <http://doi.org/10.1007/s11251-012-9205-x>
- Reimann, P., Kickmeier-Rust, M., & Albert, D. (2013). Problem solving learning environments and assessment: A knowledge space theory approach. *Computers & Education*, 64, 183–193. <http://doi.org/10.1016/j.compedu.2012.11.024>
- Rey, G.-D., & Andreas, F. (2013). The expertise reversal effect concerning instructional explanations. *Instructional Science*, 41(4), 635–656. <http://doi.org/10.1007/s11251-012-9247-0>
- Rivers, K., & Koedinger, K. R. (2014). Automating Hint Generation with Solution Space Path Construction, 329–339.
- Roelle, J., & Berthold, K. (2013). The expertise reversal effect in prompting focused processing of instructional explanations. *Instructional Science*, 41(4), 635–656. <http://doi.org/10.1007/s11251-012-9247-0>

- Roger Jang, J.-S., Sun, C.-T., & Mizutani, E. (1997). Neuro-Fuzzy and Soft Computing. A computational Approach to Learning and Machine Intelligence.
- Roll, I., Alevan, V., McLaren, B. M., & Koedinger, K. R. (2007). Designing for metacognition-applying cognitive tutor principles to the tutoring of help seeking. *Metacognition and Learning*, 2(2–3), 125–140. <http://doi.org/10.1007/s11409-007-9010-0>
- Roll, I., Alevan, V., McLaren, B. M., & Koedinger, K. R. (2011). Improving students' help-seeking skills using metacognitive feedback in an intelligent tutoring system. *Learning and Instruction*, 21(2), 267–280. <http://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2010.07.004>
- Roll, I., Baker, R. S. J. d., Alevan, V., & Koedinger, K. R. (2014). On the Benefits of Seeking (and Avoiding) Help in Online Problem-solving Environments. *Journal of the Learning Sciences*, 23(4), 537–560. <http://doi.org/10.1080/10508406.2014.883977>
- Rongmei, Z., & Lingling, L. (2009). Research on Internet Intelligent Tutoring System Based on MAS and CBR. *2009 International Forum on Information Technology and Applications*, 681–684. <http://doi.org/10.1109/IFITA.2009.511>
- Ross, A., & Willson, V. (2006). The Effects of Representations , Constructivist Approaches , and Engagement on Middle School Students ' Algebraic Procedure and Conceptual Understanding. *School Science and Mathematics*, 112(2), 117–128.
- Sağirli, M. Ö. (2016). the Metacognitive Awarenesses of Pre- Service Secondary School Mathematics Teachers , Beliefs , Attitudes on Problem Solving , and Relationship Between Them, 12(2), 464–482.
- Salden, R. J. C. M., Alevan, V. A. W. M. M., Renkl, A., & Schwonke, R. (2009). Worked Examples and Tutored Problem Solving: Redundant or Synergistic Forms of Support? *Topics in Cognitive Science*, 1(1), 203–213. <http://doi.org/10.1111/j.1756-8765.2008.01011.x>

- Salden, R. J. C. M., Alevan, V., Schwonke, R., & Renkl, A. (2010). The expertise reversal effect and worked examples in tutored problem solving. *Instructional Science*, 38(3), 289–307. <http://doi.org/10.1007/s11251-009-9107-8>
- Salden, R. J. C. M., Koedinger, K. R., Renkl, A., Alevan, V., & McLaren, B. M. (2010). Accounting for Beneficial Effects of Worked Examples in Tutored Problem Solving. *Educational Psychology Review*, 22(4), 379–392. <http://doi.org/10.1007/s10648-010-9143-6>
- Salmeron, J. L. (2009). Augmented fuzzy cognitive maps for modelling LMS critical success factors. *Knowledge-Based Systems*, 22(4), 275–278. <http://doi.org/10.1016/j.knosys.2009.01.002>
- San Pedro, M. O. Z., Baker, R. S. J. D., & Rodrigo, M. M. T. (2014). Carelessness and affect in an intelligent tutoring system for mathematics. *International Journal of Artificial Intelligence in Education*, 24(2), 189–210. <http://doi.org/10.1007/s40593-014-0015-y>
- Santos Trigo, L. M. (2003). Procesos de Transformación de Artefactos Tecnológicos en Herramientas de Resolución de Problemas Matemáticos. *Boletín de La Asociación Matemática Venezolana*, 10(2), 195–211.
- Santos Trigo, L. M. (2014). *La resolución de Problemas, Fundamentos Cognitivos*.
- Schnotz, W., & Kürschner, C. (2007). A reconsideration of cognitive load theory. *Educational Psychology Review*, 19(4), 469–508. <http://doi.org/10.1007/s10648-007-9053-4>
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*, (1), 334–370. Retrieved from http://gse.berkeley.edu/sites/default/files/users/alan-h.-schoenfeld/Schoenfeld_1992_Learning_to_Think_Mathematically.pdf
- Schwonke, R., Ertelt, A., Otieno, C., Renkl, A., Alevan, V., & Salden, R. J. C. M.

- (2013). Metacognitive support promotes an effective use of instructional resources in intelligent tutoring. *Learning and Instruction*, 23(1), 136–150. <http://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2012.08.003>
- Seaborn, K., & Fels, D. I. (2014). Gamification in theory and action: A survey. *International Journal of Human Computer Studies*, 74, 14–31. <http://doi.org/10.1016/j.ijhcs.2014.09.006>
- Sharma, M., & Chawla, S. (2014). ATools for Creating Constructivist Learning Environment and Assessing Knowledge Development using Concept Maps, 5(8).
- Skiba, D. J. (2013). Bloom's digital taxonomy and word clouds. *Nursing Education Perspectives*, 34(4), 277–280. <http://doi.org/10.5480/1536-5026-34.4.277>
- Smilovitz, E. (2013). Las carreras mas demandadas en 2013. Retrieved from <https://www.altonivel.com.mx/31647-carreras-mas-demandadas-en-2013/>
- Smith, P. L., & Ragan, T. J. (1999). Instructional Design. *Instrucional Design*.
- Stamper, J. (2011). Enhancing the Automatic Generation of Hints with Expert, 21, 153–167. <http://doi.org/10.3233/JAI-2011-021>
- Starcic, A. I., Cotic, M., & Zajc, M. (2013). Design-based research on the use of a tangible user interface for geometry teaching in an inclusive classroom geometry teaching in an inclusive classroom, 44(5), 729–745. <http://doi.org/10.1111/j.1467-8535.2012.01341.x>
- Subhedar, M. ., & Birajdar, G. . (2013). Comparison of mamdani and sugeno inference systems for dynamic spectrum allocation in cognitive radio networks. *Wireless Personal Communications*, 71(2), 805–819. <http://doi.org/10.1007/s11277-012-0845-6>
- Swann, W. (2013). The Impact of Applied Cognitive Learning Theory on Engagement with eLearning Courseware. *Journal of Learning Design*, 6(1), 61–74. <http://doi.org/10.1007/s10648-013-9243-1>

- Sweller, J. (2010). Element interactivity and intrinsic, extraneous, and germane cognitive load. *Educational Psychology Review*, 22(2), 123–138. <http://doi.org/10.1007/s10648-010-9128-5>
- Sweller, J., Ayres, P., & Kalyuga, S. (2011). Cognitive Load Theory. *Explorations in the Learning Sciences, Instructional Systems and Performance Technologies*, 1, 274. http://doi.org/10.1007/978-1-4419-8126-4_6
- Sweller, J., van Merriënboer, J. J. G., & Paas, F. G. W. C. (1998). Cognitive Architecture and Instructional Design. *Educational Psychology Review*, 10(3), 251–296. <http://doi.org/10.1023/A:1022193728205>
- Sweta, S., & Lal, K. (2017). Personalized Adaptive Learner Model in E-Learning System Using FCM and Fuzzy Inference System. *International Journal of Fuzzy Systems*. <http://doi.org/10.1007/s40815-017-0309-y>
- Thomas, P., Labat, J. M., Muratet, M., & Yessad, A. (2012). How to evaluate competencies in game-based learning systems automatically? *Lecture Notes in Computer Science (Including Subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*, 7315 LNCS, 168–173. http://doi.org/10.1007/978-3-642-30950-2_22
- Tossavainen, T. (2009). Who Can Solve $2x = 1$? – An Analysis of Cognitive Load Related to Learning Linear Equation Solving, 6(3), 435–448.
- Tzohar-Rozen, M., & Kramarski, B. (2014). Metacognition, Motivation and Emotions: Contribution of Self-Regulated Learning to Solving Mathematical Problems. *Global Education Review*, 1(4), 76–95. Retrieved from <http://ger.mercy.edu/index.php/ger/article/view/63>
- Ursini, S., Escareño, F., Montes, D., & Trigueros, M. (2008). *Enseñanza del álgebra elemental. Una propuesta alternativa*.
- V. Bodyanskiy, Y., K. Tyshchenko, O., & O. Deineko, A. (2015). An Evolving Neuro-Fuzzy System with Online Learning/Self-learning. *International Journal*

of Modern Education and Computer Science, 7(2), 1–7.
<http://doi.org/10.5815/ijmeecs.2015.02.01>

Van de Walle, J. A., & Lovin, L. H. (2006). *Teaching Student Centered Mathematics Grade K-3*. (P. E. Inc, Ed.). United States Of America.

Walker, E., Rummel, N., & Koedinger, K. R. (2014). Adaptive intelligent support to improve peer tutoring in algebra. *International Journal of Artificial Intelligence in Education*, 24(1), 33–61. <http://doi.org/10.1007/s40593-013-0001-9>

Weinstein, C. E., & Mayer, R. E. (1983). Weinstein, Claire E.; Mayer, Richard E. The Teaching of Learning Strategies. 4 Nov 83. *Innovation Abstracts*, 5(32), 2–4. <http://doi.org/10.1108/13552540210420989>

Wouters, P., Tabbers, H. K., & Paas, F. (2007). Interactivity in video-based models. *Educational Psychology Review*, 19(3), 327–342. <http://doi.org/10.1007/s10648-007-9045-4>

Xin, Y. P., Zhang, D., Park, J. Y., Tom, K., Whipple, A., & Si, L. (2011). A Comparison of Two Mathematics Problem-Solving Strategies: Facilitate Algebra-Readiness. *The Journal of Educational Research*, 104(6), 381–395. <http://doi.org/10.1080/00220671.2010.487080>

Yung, H., & Paas, F. (2015). Effects of computer-based visual representation on mathematics learning and cognitive load. *Educational Technology & Society*, 18(4), 70–77.

Zatarain-Cabada, R., Barrón-Estrada, M. L., Camacho, J. L. O., & Reyes-García, C. A. (2013). Integrating learning styles and affect with an intelligent tutoring system. *Proceedings - 2013 12th Mexican International Conference on Artificial Intelligence, MICAI 2013*, 247–253. <http://doi.org/10.1109/MICAI.2013.36>

Zeljčić, M. (2015). Modelling the Relationships Between Quantities: Meaning in Literal Expressions, 11(2), 431–442.

<http://doi.org/10.12973/eurasia.2015.1362a>

Zou Yanqun¹, belindazou@126. co. (2015). The Concept and Instruction of Metacognition in Translation Competence Development. *International Forum of Teaching & Studies*, 11(1/2), 69–78. Retrieved from <http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=eue&AN=109950954&site=ehost-live>

Zouhair, A., En-Naimi, E. M., Amami, B., Boukachour, H., Person, P., & Bertelle, C. (2012). Intelligent tutoring systems founded on the multi-agent incremental dynamic case based reasoning. *CiSt 2012 - Proceedings: 2012 Colloquium in Information Science and Technology*, 74–79. <http://doi.org/10.1109/CIST.2012.6388066>

Zuckerman, O., Arida, S., & Resnick, M. (2005). Extending Tangible Interfaces for Education: Digital Montessori-inspired Manipulatives. *CHI'05 Proceedings of the SIGCHI Conference on Human Factors in Computing Systems*, 859–868. <http://doi.org/10.1145/1054972.1055093>

ANEXOS

8.1 Anexo 1. Instrumentos de jueceo

Formato de Jueceo de Expertos: Valoración de un Modelo

Respetado juez: Usted ha sido invitado para evaluar el modelo de Mapa Cognitivo Difuso para la enseñanza de temas de álgebra que forma parte de la investigación Tutor Cognitivo para el apoyo de alumnos de nivel medio superior en la resolución de problemas de álgebra.

La evaluación del modelo nos permitirá obtener parámetros que nos ayudarán a implementarlo y de ser posible, utilizarlo en la enseñanza del álgebra.

Agradecemos su valiosa colaboración.

ATENTAMENTE

Estudiante: Blanca Estela Pedroza Méndez

Director: Dr. Juan Manuel González Calleros

Codirector: Dra. Josefina Guerrero García

NOMBRES Y APELLIDOS DEL JUEZ:

FORMACIÓN ACADÉMICA

ÁREAS DE EXPERIENCIA PROFESIONAL _____

TIEMPO _____ CARGO ACTUAL

INSTITUCIÓN _____

FECHA DE APLICACIÓN _____

Objetivo de la investigación: Diseñar una estrategia tecnológica que considere el contexto de uso para proponer un diseño instruccional que ayude a estudiantes de educación media superior en la resolución de problemas de álgebra con manejo de variables.

Objetivo del juicio de expertos: Obtener parámetros para implementar un mapa cognitivo difuso que será utilizado en una herramienta digital para proponer estrategias que ayuden en la enseñanza del álgebra.

MAPAS COGNITIVOS DIFUSOS

Son una metodología de computación suave desarrollada por Bart Kosko (Kosko, 1986) como una expansión de mapas cognitivos, los cuales son ampliamente utilizados para representar el conocimiento científico social. Pertenecen a la clase de sistemas neuro-difusos, que son capaces de incorporar el conocimiento humano y adaptarlo a través de los procedimientos de aprendizaje. Los Mapas Cognitivos Difusos (MCD) son diseñados por expertos a través de un procedimiento interactivo de adquisición de conocimiento, y tienen un amplio campo de aplicación, incluyendo el modelado de sistemas complejos e inteligentes, y el análisis de decisiones (Parsopoulos, Papageorgiou, Groumpos, y Vrahatis (2003); Garcia-H. et al. (2004); Papageorgiou y Salmeron, (2013); Salmeron, (2009)).

En general, un MCD es un digrafo etiquetado de manera difusa con retroalimentación. Representa gráficamente un razonamiento causal incierto. Su representación matricial permite hacer inferencias causales (Kosko, 1986). Los conceptos variables son representados por nodos en un grafo dirigido.

Los arcos dirigidos son etiquetados con valores difusos en el intervalo $[-1,1]$, que representan la “fuerza de impacto” entre los factores. Un valor positivo indica una causalidad positiva entre los dos factores, mientras que un valor negativo indica una causalidad negativa entre los factores. *Para fines prácticos y de aplicaciones reales, dichos valores difusos deben ser asignados en base a experimentos previos, o mediante el consenso de opiniones con expertos en el área.*

En la figura 1 se muestra un mapa cognitivo difuso en el que los conceptos variables representan algunos temas de álgebra (NOTA: los valores difusos que representan las relaciones causales, en este mapa, son a manera de ejemplo, en ninguna manera se puede afirmar que en la realidad así suceda, ni que hayan aun sido consultados con expertos).

En el mapa de la figura 1, podemos interpretar algunas de las relaciones causales de la siguiente manera:

- Para el caso de la conexión del nodo 1 (N1) al nodo 2(N2), se puede interpretar como el hecho de que si el entendimiento del alumno en identificar expresiones algebraicas aumenta en un 100%, entonces, la comprensión del tema de identificar variables o incógnitas aumentará en un 80%.
- El valor difuso de la conexión que va del nodo 4 (N4) al nodo 1 (N1), se escribió con un signo de interrogación, para ejemplificar el uso de un valor negativo, lo cual indicaría que si la comprensión en la traducción de frases a expresiones algebraicas aumenta, entonces la comprensión de identificar expresiones algebraicas decrementaría en un 20 %, con relación al aumento del nodo 4, lo cual en la realidad podría resultar ilógico. Es decir, el manejo de los valores debe representar una relación causal lógica.

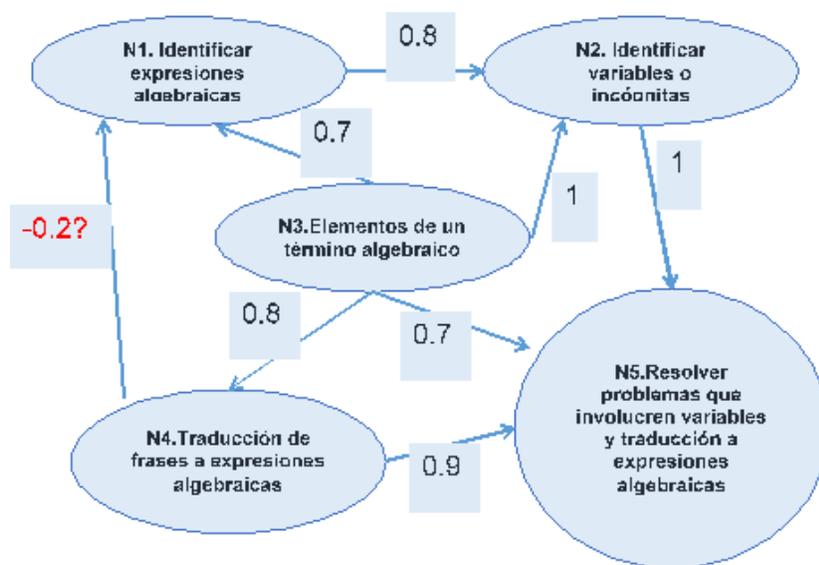


Figura 2. Mapa Cognitivo difuso para representar la relación causal entre algunos temas del álgebra

A todo mapa cognitivo difuso se le asocia una matriz de pesos difusos. Para el mapa anterior, la matriz asociada es:

	N1	N2	N3	N4	N5
N1	0	0.8	0	0	0
N2	0	0	0	0	1
N3	0.7	0	0	0.8	0.7
N4	-0.2	0	0	0	0.9
N5	0	0	0	0	0

La información difusa sobre la influencia de un concepto sobre otro, puede ser establecida a partir de un conjunto de valores lingüísticos, como los que se muestran en la siguiente tabla:

Valores Lingüísticos	Número para la matriz
Sin Efecto	1
Efecto Ligero	2
Efecto Moderado	3
Afecta	4

Efecto Considerable	5
Causa Directa	6

Considerando los siguientes temas, construir un mapa cognitivo difuso asociado a los temas.

odo	TEMAS
	Lenguaje algebraico
	Notación y clasificación de expresiones algebraicas
	Representación algebraica de expresiones en lenguaje común
	Interpretación de expresiones algebraicas
	Evaluación numérica de expresiones algebraicas
	Simplificación de signos de agrupación
	Suma y resta de polinomios
	Leyes de los exponentes y radicales
	Multiplicación y división algebraica
0	Productos notables
1	Factorización
2	Fraciones algebraicas

3	Ecuaciones
4	Ecuaciones lineales con una incógnita
5	Ecuaciones lineales con dos incógnitas
6	Ecuaciones lineales con tres incógnitas
7	Ecuaciones cuadráticas

En la siguiente tabla puede representar la matriz asociada al mapa.

										0	1	2	3	4	5	6	7

0																	
1																	
2																	
3																	
4																	
5																	
6																	